Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

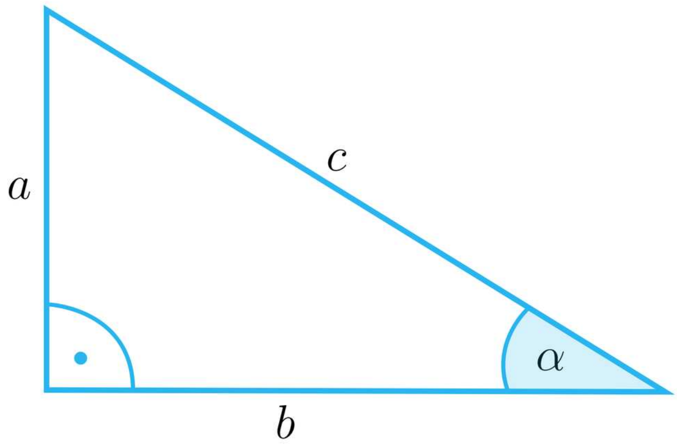
Twierdzenia z trygonometrii były znane starożytnym Grekom, jednak w postaci odpowiedników operujących długościami łuków i cięciw, a nie miarami kątów i stosunkami boków w trójkącie. Już w VII wieku Bhaskara I stworzył wzór pozwalający na przybliżone obliczanie sinusa dla kąta ostrego bez tablic. W trakcie lekcji omówimy i zastosujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi dla tego samego kąta ostrego.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie definicje funkcji trygonometrycznych.
- Wyznaczysz wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.
- Wykorzystasz związki między funkcjami trygonometrycznymi do przedstawienia wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne w prostszej postaci.

Przeczytaj

Już wiesz



- **Sinusem** kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.
- **Cosinusem** kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.
- **Tangensem** kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie.

Z powyższych definicji mamy, że:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Ważne!

Wartość drugiego kąta ostrego w podanym trójkącie wynosi $90^\circ - \alpha$. Zatem:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a}$$

Porównując z powyższymi zależnościami, mamy następujące wzory:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Przykład 1

Równość $\frac{\sin 20^\circ + \cos 70^\circ}{-\cos 70^\circ}$ możemy zapisać jako $\frac{\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = -2$.

Przykład 2

Wyrażenie

$(1 - \sin(90^\circ - \alpha))(1 + \sin(90^\circ - \alpha))$

po przekształceniu wynosi

$(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

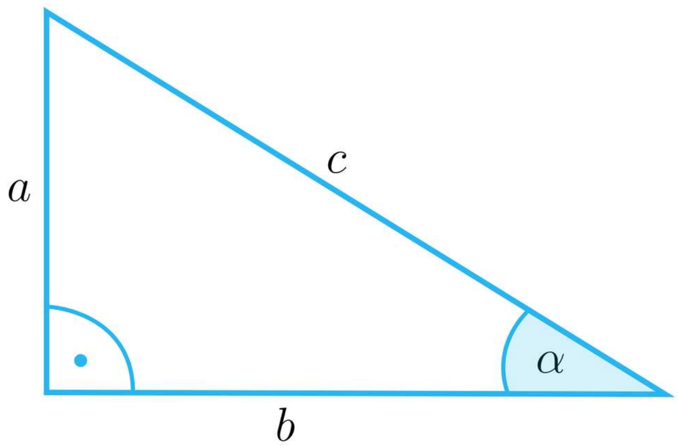
Twierdzenie: Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą następujące zależności:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna),

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Dowód



a) Z rysunku możemy odczytać, że: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ oraz $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Zatem mamy:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

b) Z rysunku odczytujemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Z definicji sinusa oraz cosinusa kąta α mamy, że:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Ważne!

Z powyższego twierdzenia mamy zależność:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Przykład 3

Wyznaczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli wiadomo, że $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$.

Z zależności w trójkącie prostokątnym mamy, że $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, zatem $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

Po podstawieniu do jedynki trygonometrycznej mamy, że $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$.

Otrzymujemy, że $\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$, zatem $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ lub $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie $\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

Stosując zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi mamy, że:

$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Przykład 5

Wyznaczymy wartość wyrażenia $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz α jest kątem ostrym.

Po przekształceniu wyrażenie $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$ jest postaci $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$.

Wartość $\sin\alpha$ wyznaczymy z jedynki trygonometrycznej.

Zatem mamy: $\sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$.

Z obliczeń mamy, że $\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$, więc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ lub $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, zatem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Szukana wartość wyrażenia wynosi $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Przykład 6

Czy istnieje kąt ostry α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{1}{4}$?

W celu sprawdzenia, czy istnieje taki kąt, wyznaczymy wartość $\sin\alpha$, a następnie wykorzystamy jedynkę trygonometryczną.

Zatem mamy: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Podstawiając, otrzymujemy równanie: $\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{4}}$, więc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Sprawdzamy, czy zachodzi równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Po podstawieniu mamy: $\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{72} + \frac{1}{16} = \frac{11}{144} \neq 1$.

Zatem nie istnieje taki kąt.

Słownik

jedynka trygonometryczna

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką i wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Na podstawie zdobytych wiadomości wykonaj zadania:

a) uprość wyrażenie $\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$,

b) wyznacz wartości funkcji $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$ kąta ostrego α, jeżeli $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dowodzi zależności, które występują pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego;
- stosuje związki między sinusem, cosinusem oraz tangensem tego samego kąta do rozwiązywania problemów w trygonometrii;
- wyznacza inne zależności na podstawie znanych mu wzorów z trygonometrii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Infografika”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Infografika”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego”.