



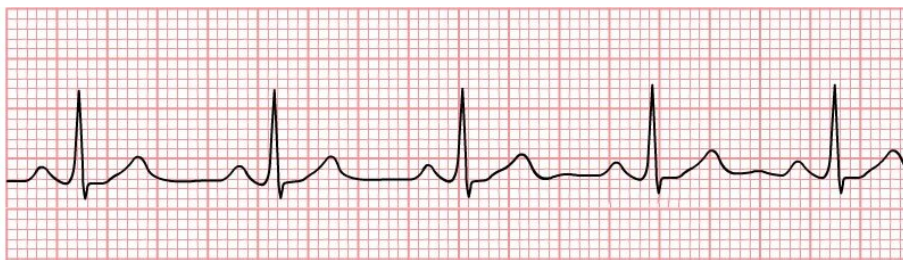
Określanie okresu funkcji na podstawie wykresu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Określanie okresu funkcji na podstawie wykresu

Źródło: dostępny w internecie: [NomeVisualizzato](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W matematyce mamy do czynienia z funkcjami, których własności występują w sposób cykliczny, co odzwierciedlają wykresy tych funkcji, składające się z powtarzających się identycznych fragmentów. Tak, jak wykres jednego z powszechnie wykonywanych badań lekarskich, jakim jest elektrokardiogram pokazujący rytm pracy serca.



Prawidłowa czynność serca

Źródło: Andrewmeyerson, dostępny w internecie: [Wikimedia](#), licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- Rozpoznasz na podstawie wykresu funkcję okresową.
- Ustalisz okres funkcji na podstawie jej wykresu.

Przeczytaj

Definicja: funkcja okresowa

Funkcję $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ określoną w zbiorze D nazywamy okresową, jeżeli istnieje taka liczba $T > 0$ (zwana okresem funkcji), że dla każdego $x \in D$, liczba $x + T \in D$ oraz zachodzi równość

$$f(x) = f(x + T)$$

Jeśli T jest okresem, to również każda naturalna dodatnia wielokrotność liczby T jest okresem funkcji.

Najmniejszą liczbę dodatnią T spełniającą warunek definicji nazywamy **okresem podstawowym funkcji**.

Zatem wartości funkcji okresowej powtarzają się w ustalonym „odstępie”, który nazywamy okresem i symbolicznie oznaczamy T .

Na podstawie wykresu lub tabeli wartości funkcji okresowej możemy ustalić w jakim odstępie powtarzają się wartości funkcji, w ten sposób ustalamy okres danej funkcji.

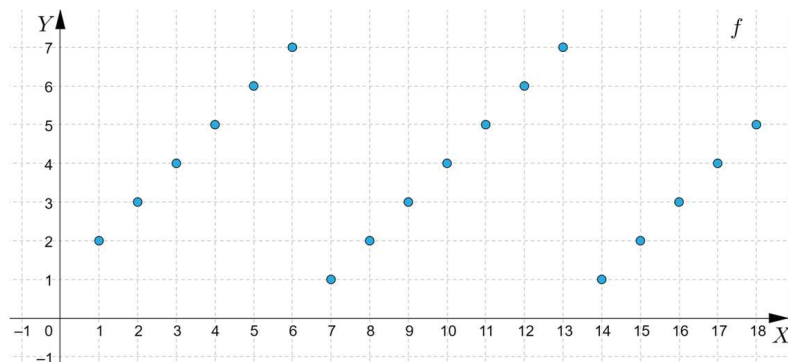
Przykład 1

Rozważmy następującą sytuację. Dzień 1 czerwca 2021 roku wypada we wtorek.

Określamy następujące przyporządkowanie: kolejnym dniom czerwca

przyporządkowujemy numer kolejny dnia tygodnia, poniedziałek – 1, wtorek – 2, środa – 3 itd. Przedstawimy te dane w tabelce częściowej oraz na wykresie.

Przyporządkowanie kolejnym dniom czerwca dni tygodnia																
kolejny dzień czerwca 2021	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	..
numer dnia tygodnia	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	..



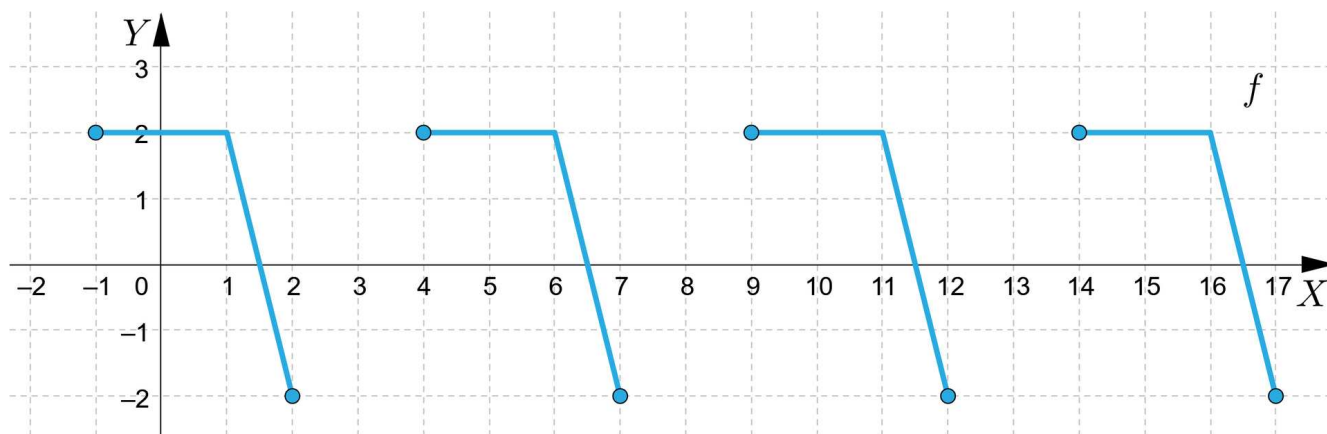
Ustalimy, czy tak określona funkcja jest okresowa.

Rozwiązanie:

Na podstawie tabeli ustalamy, że np. wtorki wypadają 1, 8, 15, 22 i 29 dnia miesiąca, czyli co siedem dni. Jednak tak określona funkcja nie jest okresowa, bo na przykład liczba 28 należy do dziedziny funkcji, ale liczba $28+7=35$ nie należy do dziedziny funkcji.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej f . Ustalimy długość okresu tej funkcji.



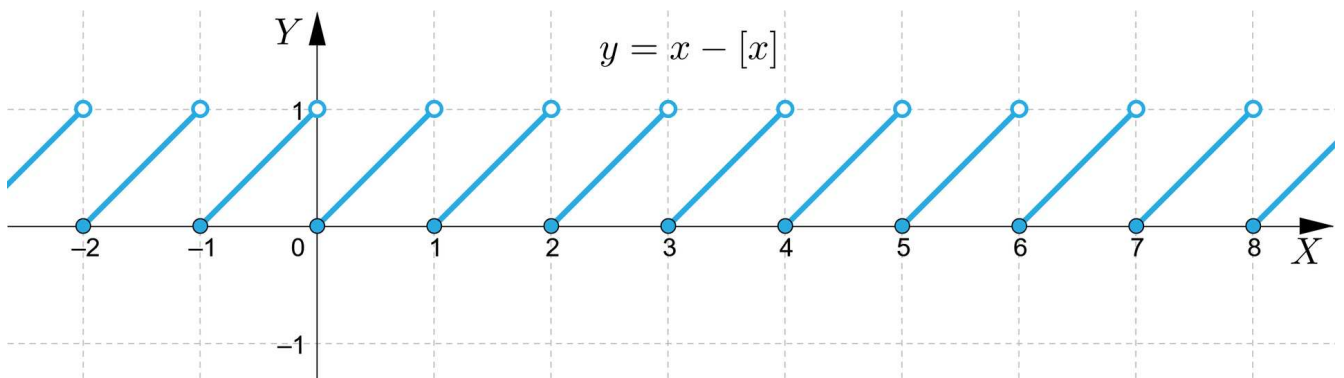
Rozwiązanie:

Zauważamy, że $f(2) = f(7) = f(12) = f(17) = -2$.

Widzimy, że wartości tej funkcji powtarzają się w odstępach co 5 argumentów, zatem spełniony jest warunek z definicji funkcji okresowej $f(x) = f(x + 5)$, co oznacza, że liczba 5 jest okresem podstawowym tej funkcji, co zapisujemy $T = 5$.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej f . Ustalimy długość okresu tej funkcji.

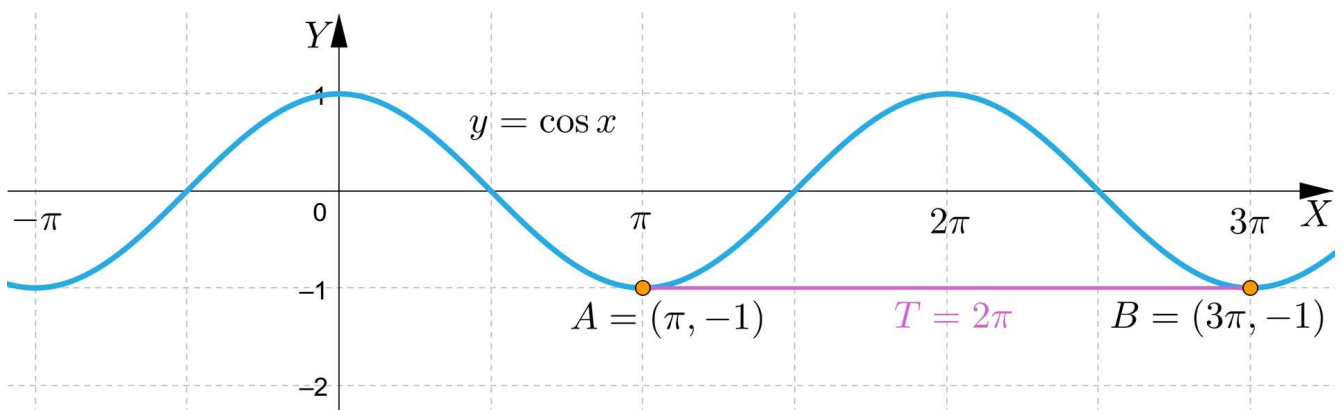


Rozwiązanie:

Na wykresie mamy przykład funkcji okresowej, której wartości powtarzają się, gdy argument funkcji wzrasta o 1 jednostkę. Spełniony jest zatem warunek z definicji funkcji okresowej $f(x) = f(x + 1)$, stąd wniosek, że okres podstawowy tej funkcji wynosi $T = 1$.

Przykład 4

Rozważmy funkcję okresową $g(x) = \cos(x)$. Ustalimy długość okresu tej funkcji.



Rozwiązanie:

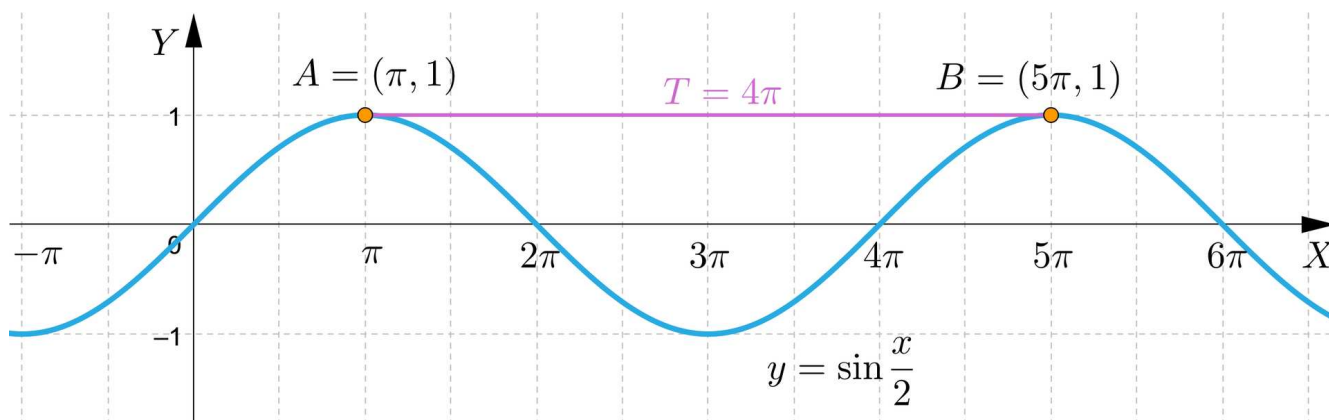
Wykres przedstawia funkcję, której wartości powtarzają się, gdy argument funkcji wzrasta o 2π jednostek. Spełniony jest zatem warunek z definicji funkcji okresowej $f(\pi) = f(\pi + 2\pi)$, co oznacza, że okres podstawowy tej funkcji wynosi $T = 2\pi$.

Okres funkcji ustalamy wyznaczając odległość między punktami A oraz B , w których funkcja osiąga lokalnie minimalną wartość.

Takie punkty występują w regularnych powtórzeniach co 2π .

Przykład 5

Weźmy pod uwagę wykres funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Ustalimy długość okresu podstawowego tej funkcji.



Rozwiązanie:

W tym przypadku okres funkcji ustalamy wyznaczając odległość między punktami A oraz B , w których funkcja osiąga maksymalną wartość.

Takie punkty występują w regularnych powtórzeniach, gdy argument wzrasta lub maleje o 4π .

Okresem podstawowym jest więc liczba $T = 4\pi$.

Ważne!

Funkcje okresowe:

- funkcja stała $f(x) = c$ jest funkcją okresową, ale nie ma okresu podstawowego, bo każda liczba dodatnia może być jej okresem,
- funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens,
- okres podstawowy funkcji sinus oraz cosinus wynosi $T = 2\pi$,
- okres podstawowy funkcji tangens wynosi $T = \pi$,
- okres podstawowy funkcji $f(x) = \sin(bx)$ oraz $f(x) = \cos(bx)$ wynosi $T = \frac{2\pi}{b}$, gdy $b \neq 0$.

Słownik

funkcja okresowa

funkcja, której wartości powtarzają się w ustalonym „odstępie”. Odstęp ten nazywamy okresem i symbolicznie oznaczamy T

funkcja stała

funkcja, która dla każdego argumentu przyjmuje tę samą wartość

okres podstawowy funkcji

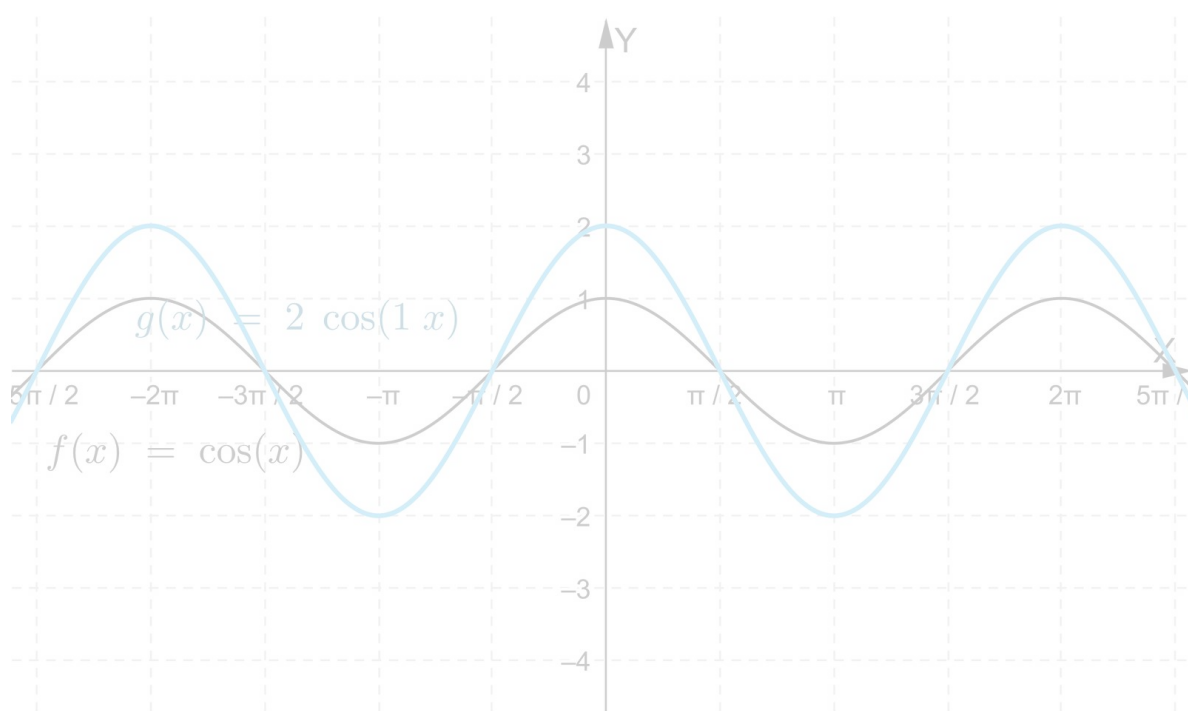
najmniejsza liczba dodatnia T spełniająca warunek definicji funkcji okresowej

$$f(x + T) = f(x)$$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z dynamicznym wykresem funkcji $y = a \cos(bx)$, zmieniając wielkość parametru a na suwaku, który rozciąga wykres funkcji w pionie oraz parametru b na suwaku, który rozciąga wykres funkcji w poziomie. Obserwuj, jak zmienia się wykres oraz długość okresu funkcji $g(x)$ utworzonej na bazie wykresu funkcji okresowej $f(x) = \cos(x)$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DdX3WDSBV>

Polecenie 2

Na podstawie wykresu w symulacji dla $a = 3$ oraz $b = 2$ wyznacz okres funkcji $g(x) = 3 \cos(2x)$.

Polecenie 3

Na podstawie wykresu w symulacji dla $a = -2$ oraz $b = -0,5$ sprawdź czy funkcja $g(x) = -2 \sin(-0,5x)$ jest okresowa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



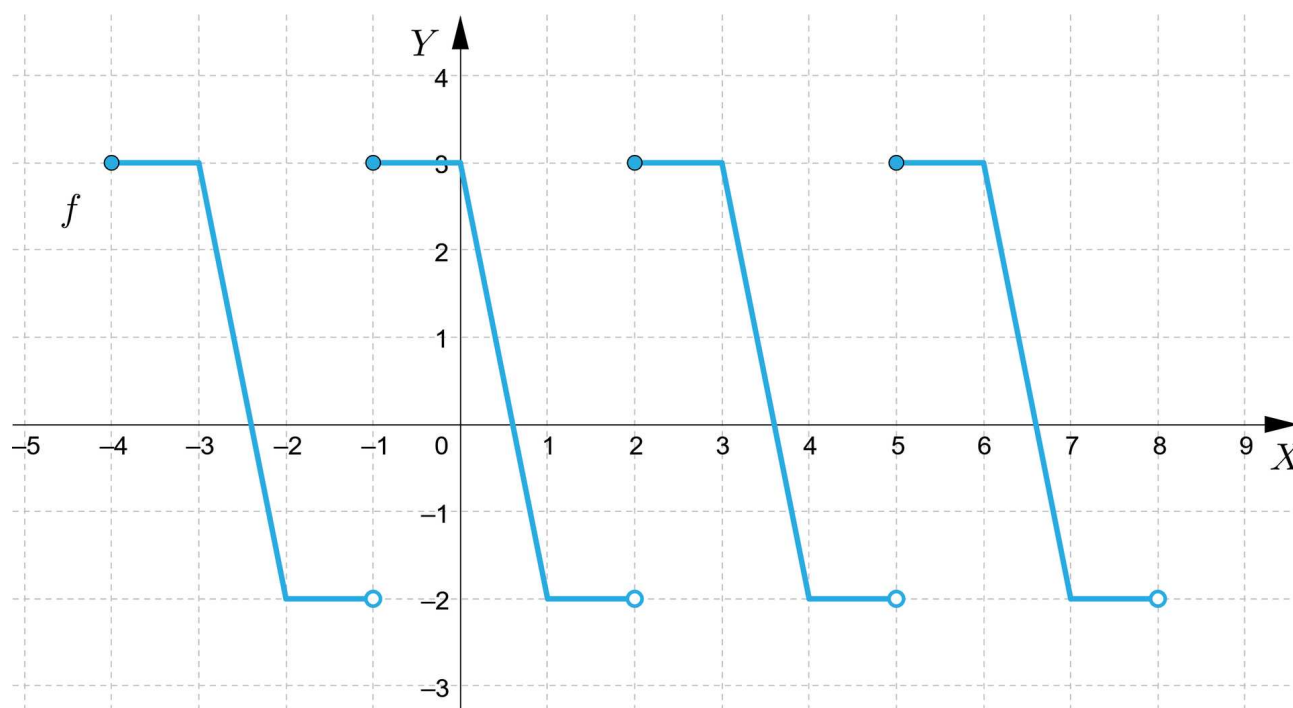
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej.



Ćwiczenie 4



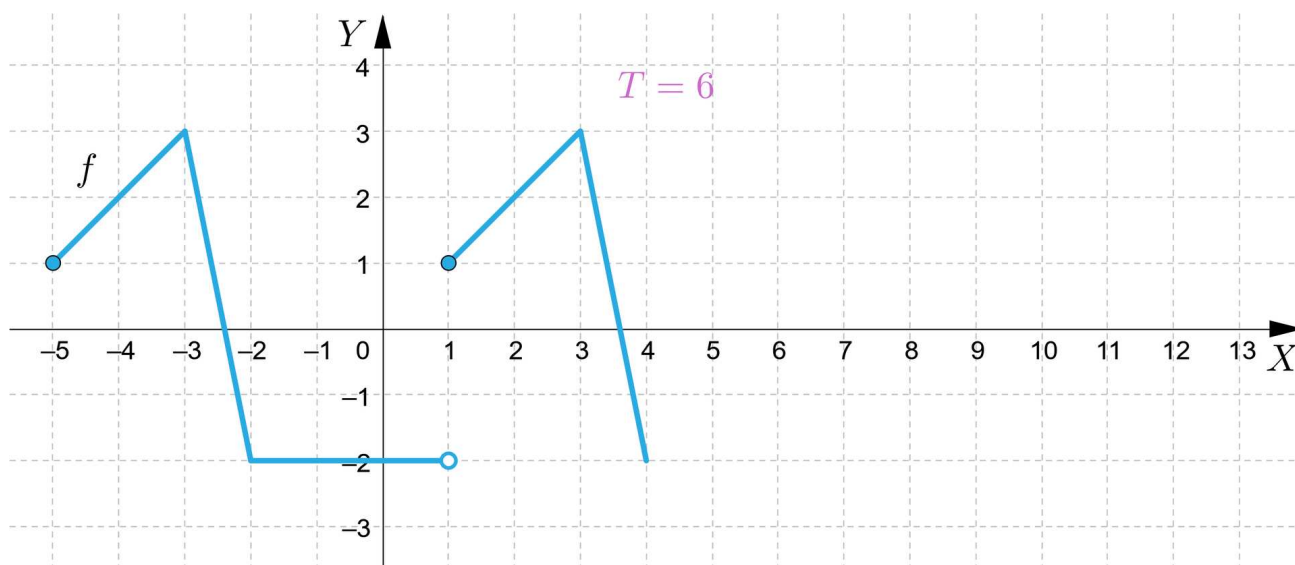
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



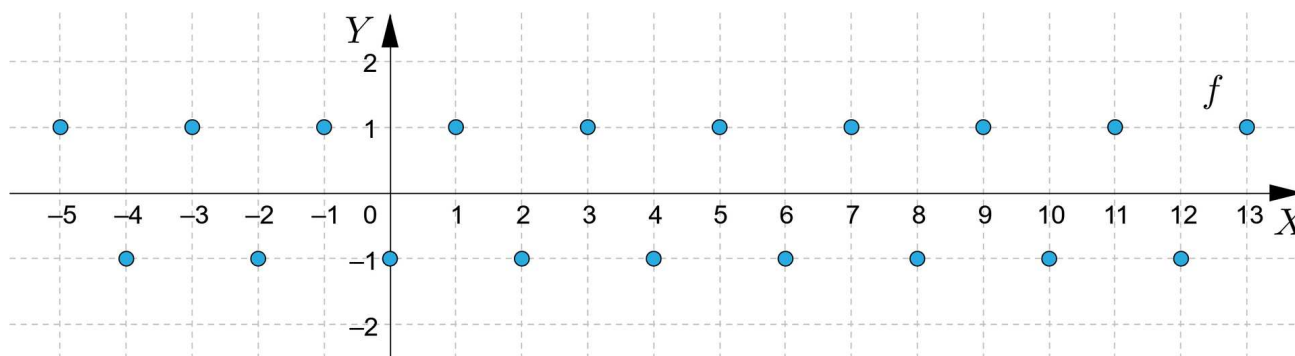
Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej f . Okres podstawowy funkcji T jest równy 6. Uzupełnij wykres funkcji f w przedziale $\langle 4, 13 \rangle$.



Ćwiczenie 7



Mamy dany wykres funkcji f , która każdej liczbie całkowitej podzielnej przez dwa przyporządkowuje wartość równą (-1) , zaś każdej liczbie całkowitej, która nie jest podzielna przez dwa przyporządkowuje wartość równą 1.



Ćwiczenie 8



Od 10 lat dokonywano pomiaru średniej temperatury w miesiącu lipcu, każdego roku, wyniki pomiarów podaje tabela. Zakładamy, że takie wyniki nadal będą się powtarzały. Na podstawie tabelki określ odpowiednią funkcję.

Pomiar średniej temperatury w miesiącu lipcu w danym roku									
Kolejny rok	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	:
Średnia temperatura w $^{\circ}C$ w lipcu	20	18	19	20	18	19	20	18	

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie okresu funkcji na podstawie wykresu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje, jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- 2) posługuje się złożeniami funkcji;
- 3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = (x - 1)(x + 2)$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje funkcję okresową;
- rozpoznaje na podstawie wykresu funkcję okresową;
- ustala okres funkcji na podstawie wykresu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza przypadku;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel może wykorzystać element lekcji odwróconej polecając, aby uczniowie w ramach przygotowania do lekcji przypomnieli sobie wiadomości dotyczące funkcji okresowej.
2. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie definicji funkcji okresowej.
2. Uczniowie dzielą się wiadomościami uzyskanymi w domu.
3. Podział klasy na grupy.
4. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku, zapoznając się z symulacją
5. Podczas pracy indywidualnej, uczniowie wykonują polecenia umieszczone pod symulacją interaktywną. Napotkane trudności wyjaśniają korzystając z pomocy nauczyciela.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Na podsumowanie lekcji nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udziela uczniom informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest ułożenie 3 zadań dotyczących okresowości funkcji sinus lub cosinus i przesłanie ich do koleżanki lub kolegi z klasy. Zadania należy rozwiązać, korzystając z symulacji interaktywnej.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja i jej własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przy omawianiu własności funkcji sinus i cosinus.