



## Związek pierwiastkowania z potęgowaniem

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Związek pierwiastkowania z potęgowaniem

Źródło: Miguel Á. Padriñán, dostępny w internecie: [www.pexels.com](http://www.pexels.com).

W tym materiale przypomnimy definicję potęgi o wykładniku wymiernym oraz zastosujemy ją do rozwiązywania zadań łączących potęgi i pierwiastki. W omawianych przykładach przydadzą nam się zarówno własności potęgowania jak i pierwiastkowania. Przy okazji poznasz też nowe własności pierwiastkowania, które wynikają wprost z własności potęgowania.

### Twoje cele

- Zastosujesz definicję potęgi o wykładniku wymiernym.
- Zastosujesz własności pierwiastkowania.
- Zastosujesz własności potęgowania.

# Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw definicję potęgi o wykładniku wymiernym.

## Definicja: Potęga o wykładniku wymiernym

Jeśli  $a > 0$  oraz  $k$  jest liczbą całkowitą, zaś  $m$  liczbą naturalną większą niż 1, to:

$$a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}.$$

## Przykład 1

Zapiszemy w postaci jednej potęgi wyrażenie  $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ .

Z definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} = \left[ 5 \cdot \left( 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach:

$$\left[ 5 \cdot \left( 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 5 \cdot \left( 5^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Z własności potęgowania potęgi:

$$\left[ 5 \cdot \left( 5^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left( 5 \cdot 5^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach:

$$\left( 5 \cdot 5^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( 5^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z własności potęgowania potęgi:

$$\left( 5^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{7}{8}}.$$

Polecenie zostało wykonane, ale uzyskane wyrażenie ponownie można byłoby zapisać przy pomocy pierwiastka korzystając z definicji potęgi o wykładniku wymiernym  $5^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{5^7}$ .

## Przykład 2

Uprościmy wyrażenie  $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$ .

Z definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \left[2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach:

$$\left[2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[2^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Z własności potęgowania potęgi:

$$\left[2^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}}.$$

Z definicji potęgi o wykładniku wymiernym:

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

### Przykład 3

Uprościmy wyrażenie  $\frac{2^{32} \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{4^{15} \cdot \sqrt[3]{2}}$ .

Zamienimy najpierw pierwiastki na potęgi

$$\frac{2^{32} \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{4^{15} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{2^{32} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{4^{15} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$$

Liczbę  $4^{15}$  możemy przedstawić jako potęgę o podstawie 2:  $4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{2 \cdot 15} = 2^{30}$ .

Zatem:

$$\frac{2^{32} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{4^{15} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{32} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{2^{30} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}.$$

Możemy teraz, korzystając z własności ilorazu potęg o tych samych podstawach, uprościć iloraz liczb  $2^{32}$  i  $2^{30}$ , otrzymując  $2^2$ :

$$\frac{2^{32} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{2^{30} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

Do licznika powyższego ułamka zastosujemy własność iloczynu potęg o tych samych podstawach:

$$\frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{2+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{2+\frac{3}{6}-\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{1\frac{4}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

Pozostaje już tylko zastosować własność ilorazu potęg o tych samych podstawach

$$\frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

Zatem rozważane wyrażenie ma wartość równą  $2\sqrt[3]{2}$ .

### Przykład 4

Rozważmy wyrażenie nieskończone  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$ . Zauważmy, że jego wartość jest liczbą dodatnią i oznaczmy jego wartość przez  $x$ :

$$x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$$

Ponieważ wyrażenie po prawej stronie jest liczbą dodatnią, więc możemy obie strony powyższej równości podnieść do kwadratu otrzymując

$$x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2}\dots} \quad (*)$$

Zauważmy teraz, że po prawej stronie ponownie pojawiło się początkowe wyrażenie  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$ , które oznaczyliśmy przez  $x$ . Zatem równość (\*) przyjmuje postać

$$x^2 = 2x, \text{ co przekształca się jak następuje:}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

Korzystając z własności iloczynu równego zeru otrzymujemy, że  $x = 0$  lub  $x - 2 = 0$ , czyli  $x = 2$ .

Ponieważ  $x > 0$ , więc  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}} = x = 2$ .

W powyższym przykładzie mamy do czynienia z wyrażeniem, które można zdefiniować rekurencyjnie.

Zauważmy, że wyrażenie nieskończone  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$  to nic innego jak nieskończona sekwencja (ciąg) liczb:  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$

Wprowadźmy oznaczenia  $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$

Przy takich oznaczeniach możemy zauważyć, że dla dowolnej naturalnej dodatniej liczby  $n$  prawdziwa jest zależność  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$  oraz  $a_1 = \sqrt{2}$ .

Ogólnie mówiąc wzór rekurencyjny to taki, w którym każdy wyraz, poza pierwszym, jest uzależniony od poprzednich.

#### Przykład 5

Rozważmy liczbę  $x = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}\dots}}}$

Po podniesieniu każdej ze stron do kwadratu otrzymujemy równość  $x^2 = 2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\dots}}}$ , w której ponownie za wyrażenie  $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\dots}}}}$  możemy podstawić  $x$  otrzymując równość  $x^2 = 2\sqrt{3x}$ .

Po podniesieniu obu stron do kwadratu, otrzymujemy  $x^4 = 4 \cdot 3x$ , czyli  $x^4 - 12x = 0$ , co jest równoważne  $x(x^3 - 12) = 0$ .

Ponieważ  $x$  jest liczbą dodatnią, więc  $x^3 = 12$ , czyli  $x = \sqrt[3]{12}$ .

Wyrażenie z powyższego przykładu również można zdefiniować rekurencyjnie. W tym przypadku zależność wygląda następująco:

$$a_1 = \sqrt{2\sqrt{3}}, a_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{3a_n}}.$$

### Przykład 6

Wykażemy, że jeśli  $x = 3^{4\sqrt{2}+2}$  i  $y = 3^{2\sqrt{2}+3}$ , to  $y = 9\sqrt{x}$ .

Założenia:  $x = 3^{4\sqrt{2}+2}$  i  $y = 3^{2\sqrt{2}+3}$ .

Teza:  $y = 9\sqrt{x}$ .

### Dowód

Rozważmy prawą stronę tezy. Z definicji potęgi o wykładniku wymiernym mamy  $9\sqrt{x} = 9x^{\frac{1}{2}}$ .

Po podstawieniu danej wartości  $x$ , otrzymujemy  $9x^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Możemy teraz skorzystać z własności potęgowania potęgi

$$9 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot 3^{(4\sqrt{2}+2) \cdot \frac{1}{2}} = 9 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1}.$$

Zamienimy liczbę 9 na potęgę o podstawie 3 i skorzystamy z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach:

$$9 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1} = 3^2 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} = 3^{3+2\sqrt{2}} = y, \text{ co kończy dowód.}$$

Poniżej zastosujemy wzór  $\sqrt[k \cdot m]{a^{m \cdot n}} = \sqrt[k]{a^n}$ , który jest prawdziwy dla liczb  $a \geq 0$ ,  $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

### Przykład 7

Korzystając ze wzoru  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , przekształcimy wyrażenie  $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right)^2$ .

$$\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}.$$

Korzystając ze wzoru  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , przekształcimy wyrażenie  $\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{5}\right)^2$ .

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{5}\right)^2 &= \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} + \left(\sqrt[4]{5}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\sqrt[4]{10} + \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \\ &= 2^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt[4]{10} + 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 2\sqrt[4]{10} + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

### Przykład 8

Korzystając ze wzoru  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , uprościmy wyrażenie

$$\sqrt{\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{15} + \sqrt{3}}.$$

$$\sqrt{\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{15} + \sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2 + 2\sqrt[4]{15} + \left(\sqrt[4]{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}\right)^2} = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}.$$

## Słownik

**ciąg**

przyporządkowanie pewnych obiektów kolejnym liczbom naturalnym dodatnim

**rekurencja**

odwoływanie się definicji do samej siebie

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w filmie samouczku.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dx9Pv95Gp>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej związku pierwiastkowania z potęgowaniem.

---

## Polecenie 2





# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Związek pierwiastkowania z potęgowaniem

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zastosuje definicję potęgi o wykładniku wymiernym;
- zastosuje własności pierwiastkowania;
- zastosuje własności potęgowania.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali cel zajęć w temacie: „Związek pierwiastkowania z potęgowaniem” oraz kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Zapoznaj się z filmem przedstawiającym związek pierwiastkowania z potęgowaniem.” z sekcji „Film samouczek”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Działania na pierwiastkach](#)
- [Działania na potęgach](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Związek pierwiastkowania z potęgowaniem”.