



# Średnia arytmetyczna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Średnia arytmetyczna

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

Czy wiesz, że w czasie II wojny światowej alianci spisywali numery seryjne zdobytych czołgów niemieckich? Dzięki analizie statystycznej tych numerów, mogli statystycznie oszacować wielkość miesięcznej produkcji czołgów i innych elementów sprzętu wojskowego. Po wojnie stwierdzono, że wyniki, które w ten sposób uzyskano były znacznie dokładniejsze niż dane dostarczone przez wysoko wyszkolonych wywiadowców i obserwacje lotnicze.

Ta anegdota zapewne utwierdziła Cię w przekonaniu, jak ważną dziedziną wiedzy jest statystyka i z przyjemnością zapoznasz się z materiałem, który dotyczy średniej arytmetycznej – jednego z najważniejszych pojęć statystycznych.

### Twoje cele

- Obliczysz średnią arytmetyczną zestawu danych uporządkowanych oraz danych nieuporządkowanych.
- Wyodrębnisz własności badanego zestawu danych, na podstawie obliczonej średniej.

# Przeczytaj

---

## Parametry statystyczne

Dane statystyczne przedstawione w postaci uporządkowanego szeregu statystycznego, tablic bądź wykresów, można poddać analizie, której zadaniem jest wykrycie prawidłowości i związków zachodzących w badanej zbiorowości, co w konsekwencji może posłużyć do ustalenia przyczyn kształtowania się danego zjawiska.

Do analizy danych wykorzystywane są **parametry statystyczne** (zwane też miarami statystycznymi lub charakterystykami liczbowymi).

Do podstawowych parametrów opisujących strukturę zbiorowości statystycznych należą miary tendencji centralnej (np. **średnia arytmetyczna**, średnia ważona, dominanta) i miary rozproszenia (np. wariancja, odchylenie standardowe).

**Miary tendencji centralnej** (zwane miarami średnimi, przeciętnymi) charakteryzują przeciętny poziom badanego zjawiska. Przyjmują takie wartości, wokół których skupiają się wszystkie pozostałe wartości badanej cechy statystycznej. Są to miary mianowane, wyznaczone dla cech mierzalnych.

**Miary rozproszenia** (miary rozrzutu, odchylenia, dyspersji) informują jakie są różnice między poszczególnymi wartościami jednostek statystycznych, a ich wartością średnią. Pokazują stopień zróżnicowania między sobą jednostek statystycznych pod względem badanej cechy.

## Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna (zwana też krótko średnią) jest jedną z miar tendencji centralnej, umożliwiającą formułowanie obiektywnych wniosków dotyczących zebranych **danych liczbowych**.

### Definicja: Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nazywamy liczbę  $\bar{x}$  określoną wzorem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Średnia arytmetyczna może przyjmować wartości, nie występujące w badanym zbiorze danych. Jest wielkością mianowaną, czyli jest wyrażona w takich samych jednostkach jak badana cecha.

### Przykład 1

Pewien zakład pracy zatrudnia 4 pracowników. W maju pracownicy przepracowali odpowiednio: 160 godzin, 220 godzin, 140 godzin, 180 godzin. Obliczymy średnią godzin przepracowanych w maju przez jednego pracownika.

**Rozwiązanie:**

Zbiorowość statystyczną tworzą pracownicy zakładu pracy. Jest 4 pracowników, zatem liczba jednostek statystycznych to  $n = 4$ .

Badana cecha to liczba przepracowanych godzin. Wartości tej cechy:

$$x_1 = 160 \text{ godzin}, x_2 = 220 \text{ godzin}, x_3 = 140 \text{ godzin}, x_4 = 180 \text{ godzin}.$$

Wykonujemy obliczenia, podstawiając wyznaczone liczby do wzoru na średnią arytmetyczną.

$$\bar{x} = \frac{160+220+140+180}{4} = \frac{700}{4}$$

$$\bar{x} = 175 \text{ godzin}$$

Odpowiedź:

Średnio w maju pracownik przepracował 175 godzin. Dwóch pracowników przepracowało mniej godzin, a dwóch więcej od średniej.

Obliczając średnią arytmetyczną, należy uwzględnić wszystkie wartości danego zbioru. Oznacza to, że zmiana któregośkolwiek z elementów zbioru danych prowadzi do zmiany wartości średniej.

Należy przy tym pamiętać, że **średnia arytmetyczna** nie może przyjmować wartości niższej niż najmniejsza wartość badanej cechy oraz wyższej niż największa wartość badanej cechy.

**Przykład 2**

Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie zatrudniającej 9 pracowników wynosiło 3600 zł. Zatrudniono nowego pracownika i teraz średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 5%. Obliczymy ile zarabia nowo zatrudniony pracownik.

**Rozwiązanie:**

Oznaczmy:

$x_1$  zł – zarobki pierwszego pracownika,

$x_2$  zł – zarobki drugiego pracownika,

...

$x_9$  zł – zarobki dziewiątego pracownika,

$x_{10}$  zł – zarobki dziesiątego, nowo przyjętego pracownika.

Wtedy:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_9}{9} = 3600$$

Stąd:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 32400$$

Po zatrudnieniu nowego pracownika średnia arytmetyczna zarobków wzrosła i wynosi teraz:

$$105\% \cdot 3600 = 3780 \text{ zł}$$

Podstawiając uzyskane dane do wzoru na średnią arytmetyczną, wyznaczymy wynagrodzenie nowo zatrudnionego pracownika.

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_9+x_{10}}{10} = 3780 \quad | \cdot 10$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 + x_{10} = 37800$$

$$32400 + x_{10} = 37800$$

$$x_{10} = 5400 \text{ zł}$$

Odpowiedź:

Nowo zatrudniony pracownik zarabia 5400 zł.

W niektórych przypadkach średnią możemy obliczyć korzystając z tego, że jeżeli każdą z liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zwiększymy (lub zmniejszymy) o liczbę  $k$ , to średnia zwiększy się (lub zmniejszy) również o liczbę  $k$ .

### Przykład 3

Obliczymy średnią arytmetyczną liczb: 16, 15, 18, 24, 26, 19, 22.

#### Rozwiązanie:

Zauważmy, że wszystkie liczby z rozważanego zestawu są „bliskie” liczbie 20.

Zapisujemy więc każdą z tych liczb w postaci sumy (różnicy), której jednym ze składników jest liczba 20.

$$16 = 20 - 4$$

$$15 = 20 - 5$$

$$18 = 20 - 2$$

$$24 = 20 + 4$$

$$26 = 20 + 6$$

$$19 = 20 - 1$$

$$22 = 20 + 2$$

Obliczamy średnią arytmetyczną tak zapisanych liczb.

$$\bar{x} = \frac{(20-4)+(20-5)+(20-2)+(20+4)+(20+6)+(20-1)+(20+2)}{7}$$

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 20 + (-4-5-2+4+6-1+2)}{7}$$

$$\bar{x} = 20 + \frac{-12+12}{2} = 20 + 0 = 20$$

Odpowiedź:

Średnia arytmetyczna zestawu podanych liczb jest równa 20.

Niech  $A$  i  $B$  będą zbiorami dwóch różnych danych liczbowych. Średnia  $\bar{x}_A$  niech będzie średnią arytmetyczną liczb ze zbioru  $A$ , średnia  $\bar{x}_B$  niech będzie średnią arytmetyczną liczb ze zbioru  $B$ .

Niech  $C$  będzie zbiorem utworzonym ze wszystkich liczb zbioru  $A$  i zbioru  $B$  oraz  $\bar{x}$  niech będzie średnią liczb ze zbioru  $C$ . Wtedy średnia arytmetyczna liczb  $\bar{x}_A$  i  $\bar{x}_B$  nie musi być równa liczbie  $\bar{x}$ .

#### Przykład 4

W grupie znajomych są 3 kobiety i 5 mężczyzn. Każda z kobiet ma 18 lat. Natomiast każdy z mężczyzn ma 20 lat.

Średnia wieku kobiet wynosi więc 18 lat, a mężczyzn 20 lat. Czy z tego wynika, że średnia wieku całej grupy jest równa  $\frac{18+20}{2} = 19$  lat?

Obliczmy:

$$\frac{18+18+18+20+20+20+20+20}{3+5} = \frac{154}{8} = 19,25$$

Otrzymaliśmy inny wynik, gdyż liczba kobiet nie była równa liczbie mężczyzn!

Dotychczas określaliśmy średnią arytmetyczną zestawu danych przedstawionego w postaci szeregu indywidualnego, teraz pokażemy, jak można wyznaczyć średnią liczb zapisanych w postaci szeregu rozdzielczego punktowego.

#### Przykład 5

Piotrek obliczył, że na 15 początkowych stronach książki, którą czyta, znajduje się następująca liczba wierszy: 30, 26, 26, 32, 26, 26, 30, 30, 24, 32, 26, 26, 24, 30, 32.

Obliczymy średnią liczbę wierszy na jednej stronie tej książki.

**Rozwiązanie:**

**I sposób:**

Obliczamy średnią, korzystając z danych indywidualnych.

$$\bar{x} = \frac{30+26+26+32+26+26+30+30+24+32+26+26+24+30+32}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{420}{15} = 28$$

**II sposób:**

Zapisujemy dane w postaci szeregu rozdzielczego.

Argumenty i Wartości				
Liczba wierszy na stronie	24	26	30	32
Liczba stron	2	6	4	3

Zauważmy, że sumę wierszy możemy teraz obliczyć jako sumę iloczynów liczb wierszy na stronie i liczb stron.

$$24 \cdot 2 + 26 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 32 \cdot 3 = 420$$

Obliczamy średnią.

$$\bar{x} = \frac{420}{15} = 28$$

Odpowiedź:

Średnia liczba wierszy na 15 początkowych stronach książki wynosi 28.

## Słownik

**średnia arytmetyczna**

średnia arytmetyczna liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  to liczba  $\bar{x}$  określona wzorem

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Zastanów się, w jaki sposób można obliczyć średnią arytmetyczną zestawu danych przedstawionych w postaci graficznej.

Opracuj algorytm postępowania. Porównaj swoje propozycje z zawartymi w galerii zdjęć interaktywnych.

---

## Polecenie 2

Zważono zawodników wagi ciężkiej, biorących udział w turnieju. Okazało się, że dwóch zawodników waży po 120 kg, dwóch po 95 kg, czterech po 110 kg, jeden 102 kg.

Przedstaw te dane na wykresie i oblicz średnią wagę zawodnika.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



W kilku miejscowościach prowadzono pomiary temperatury powietrza. Okazało się, że w każdej z tych miejscowości średnia temperatur jest równa  $2^{\circ}\text{C}$ .

Uzupełnij tabele tych pomiarów, wpisując odpowiednie liczby.

Ćwiczenie 5



W tabeli przedstawiono liczbę punktów zdobytych przez uczniów z testu z fizyki.

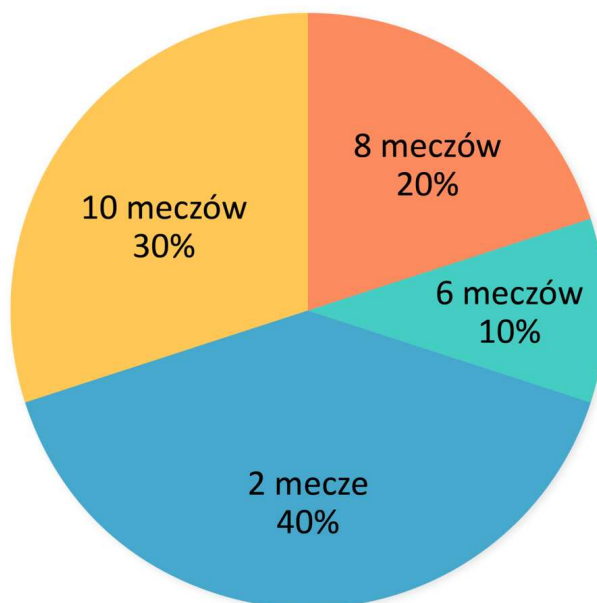
Argumenty i Wartości					
Liczba punktów	0	2	3	4	5
Liczba uczniów	2	5	4	7	2

Ćwiczenie 6

### Ćwiczenie 7



Na wykresie przedstawiono procentowy podział dwudziestu zawodników w zależności od liczby meczów rozegranych w tym sezonie.



### Ćwiczenie 8



Wiadomo, że średnia arytmetyczna  $k$  liczb jest równa  $x$ , natomiast średnia arytmetyczna innych  $n$  liczb jest równa  $y$ . Wykaż, że średnia arytmetyczna sumy tych liczb (czyli łącznie  $k + n$  liczb) jest równa  $\frac{kx+ny}{k+n}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Średnia arytmetyczna

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza średnią arytmetyczną zestawu danych
- odkrywa własności średniej
- wykorzystuje własności średniej do określania cech charakterystycznych badanego zestawu danych
- dostrzega regularności, podobieństwa oraz analogie, formułuje wnioski i na ich podstawie oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych w postaci szeregu rozdzielczego, nie korzystając ze wzoru na średnią ważoną
- stosuje i tworzy strategie, rozwiązując nietypowe zadania ze statystyki

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja
- praca z ekspertem
- studium przypadku
- pentagram

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie przypominają podstawowe pojęcia statystyczne.
2. Dyskusja – w jaki sposób najszybciej (najłatwiej) można oszacować przeciętny wzrost uczniów, cenę danego towaru czy przeciętny wiek danej grupy osób. W ramach dyskusji, uczniowie wspólnie zastanawiają się też co w potocznym rozumieniu, kryje się pod pojęciem „przeciętny” lub „średni”.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie wspólnie oglądają materiał z sekcji „Przeczytaj” oraz galerię zdjęć interaktywnych, pod kierunkiem eksperta – wybranego wcześniej ucznia, który przygotował się w domu do wystąpienia. Ekspert objaśnia oglądany materiał, zwraca uwagę na ważne elementy i omawiane własności średniej.
2. Uczniowie wspólnie ustalają temat zajęć i określają umiejętności, które należy uzyskać.
3. Uczniowie pracują w 4 grupach. Każda z grup najpierw zbiera wśród wszystkich uczniów klasy dane na temat liczby przyniesionych tego dnia do szkoły:
  - zeszytów (gr. 1),
  - książek (gr. 2),
  - długopisów (gr. 3),
  - ołówków (gr. 4).
4. Następnie uczniowie mają zebrane dane przedstawić w postaci szeregu rozdzielczego punktowego i obliczyć średnią posiadanych przez ucznia przedmiotów (odpowiednio – zeszytów, książek, długopisów bądź ołówków).

5. Należy też scharakteryzować uczniów pod względem badanej cechy.
6. Prezentacja materiałów wypracowanych przez grupy ma charakter studium przypadku. W czasie dyskusji podsumowującej tę część zajęć, uczniowie wspólnie zastanawiają się, czy wyznaczone średnie dobrze czy źle (i dlaczego) oddały rzeczywisty obraz posiadanych przez uczniów przedmiotów.

### **Faza podsumowująca:**

1. Końcowym elementem zajęć jest uzupełnienie przez każdą z grup pentagramu, na ramionach którego należy zapisać jedną ważną własność związaną ze średnią arytmetyczną.  
W środku gwiazdy uczniowie na zielono wpisują związane z wyznaczaniem i interpretacją średniej dobrze ukształtowane umiejętności, a na czerwono wątpliwości, niezrozumiałe pojęcia, itp.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, przedstawiciele grup dokonują oceny koleżeńskiej członków swojej grupy.

### **Praca domowa:**

Uczniowie w domu wykonują ćwiczenia interaktywne zawarte w sekcji „Sprawdź się”.

### **Materiały pomocnicze:**

[Średnia arytmetyczna i mediana zestawu danych](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Z galerią zdjęć interaktywnych i wiadomościami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”, uczniowie mogą zapoznać się w domu, wtedy w czasie zajęć będzie więcej czasu na praktyczne wyznaczanie średniej i interpretację uzyskanych wyników.