Wzór na sumę i różnicę sinusów

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wzór na sumę i różnicę sinusów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Do tej pory poznałeś wzory na funkcje trygonometryczne sumy oraz różnicy kątów. W tym materiale dowiesz się w jaki sposób ze znanych wzorów wyprowadzić wzory na sumę oraz różnicę sinusów. Na podstawie tych nowych wzorów będziesz obliczać wartości wyrażeń oraz zmieniać sumy algebraiczne związane z funkcjami trygonometrycznymi na iloczyny.

Twoje cele

1. Dowiesz się, jak wyglądają wzory na $\sin\alpha + \sin\beta$ oraz $\sin\alpha - \sin\beta$.
2. Nauczysz się stosować wzory na $\sin\alpha + \sin\beta$ oraz $\sin\alpha - \sin\beta$ do obliczania wartości wyrażeń.

Przeczytaj

Do wyprowadzenia wzorów na sumę i różnicę sinusów wykorzystamy poznane wzory na sinus sumy oraz sinus różnicy. Przypomnijmy je zatem.

Twierdzenie: wzór na sinus sumy argumentów, wzór na sinus różnicy argumentów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Teraz udowodnimy twierdzenie o sumie sinusów i różnicy sinusów.

Twierdzenie: wzór na sumę sinusów, wzór na różnicę sinusów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

Dowód

Zauważmy, że prawdziwe są następujące zależności

$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}.$

1. Korzystając z powyższych zależności, możemy sumę sinusów zapisać następująco

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

Korzystając ze wzorów na sinus sumy i różnicy argumentów otrzymujemy

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) +$

$+ \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

co kończy dowód wzoru $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. Korzystając z powyższych zależności, dla argumentów α i β możemy różnicę sinusów zapisać następująco

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Korzystając ze wzorów na sinus sumy i różnicy argumentów otrzymujemy

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) -$$

$$+ \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

co kończy dowód wzoru $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Przykład 1

Zmienimy wyrażenie $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ na iloczyn trzech funkcji trygonometrycznych.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na sumę sinusów sumujemy $\sin\alpha$ i $\sin 3\alpha$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha(2\cos\alpha + 1) = \sin 2\alpha\cdot 2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Zamienimy teraz $\cos\alpha$ i $\frac{1}{2}$ na sinusy odpowiednich argumentów

$$2\sin 2\alpha\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right]$$

i zastosujemy ponownie wzór na sumę sinusów

$$4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}\right) =$$

$$= 4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right]}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}}$.

Rozwiązanie

Najpierw wykorzystamy wzory redukcyjne, a następnie wzór na różnicę sinusów

$$\frac{5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right]}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{5\left(\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{5\cdot 2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}} = 10.$$

Przykład 3

Obliczymy $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, jeżeli $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Rozwiązanie

Wykorzystajmy wzór na różnicę sinusów

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$2\sin\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{3}\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x.$$

Ponieważ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, zatem $2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}$.

Przykład 4

Obliczymy $\operatorname{tg} x$, jeżeli wiadomo, że $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$.

Rozwiązanie

Wykorzystując wzór na różnicę sinusów przekształćmy równanie dane w zadaniu

$$\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$$

do postaci

$$2\sin\frac{x+30^\circ+x-30^\circ}{2}\cdot\cos\frac{x+30^\circ-x+30^\circ}{2} = 2\sqrt{3}\cos x.$$

Zapiszmy dalej $2\sin x\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\cos x$.

Stąd otrzymujemy zależność między sinusem i cosinusem tego samego argumentu $\sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x$.

Korzystając z definicji funkcji tangens otrzymujemy odpowiedź $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = 2$.

Słownik

wzór na sinus sumy argumentów, wzór na sinus różnicy argumentów

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

wzór na sumę sinusów, wzór na różnicę sinusów

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod nią.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1957tDuI

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania wzoru na sumę sinusów.

Polecenie 2

Wyrażenie $\sin x - \cos x$ zapisz za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej.

Polecenie 3

Podane wyrażenie $1 + \sin x - \cos x$ zapisz w postaci iloczynu dwóch funkcji trygonometrycznych.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$.

Ćwiczenie 8

Zapisz wyrażenie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ jako iloczyn trzech funkcji trygonometrycznych.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na sumę i różnicę sinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory na $\sin\alpha + \sin\beta$ oraz $\sin\alpha - \sin\beta$ do obliczania wartości wyrażeń,
- dowodzi twierdzenia o sumie i różnicy $\sin\alpha$ oraz $\sin\beta$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Wzór na sumę i różnicę sinusów” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Tożsamości trygonometryczne

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wzór na sumę i różnicę sinusów”.