



Przybliżone wartości logarytmów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przybliżone wartości logarytmów

Źródło: Nick Hillier, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W 1620 r. Anglik Edmund Gunter odkrył skalę logarytmiczną. Kreski podziału na tej skali są proporcjonalne do logarytmów kolejnych liczb.

Dwa lata później inny matematyk angielski William Oughtred narysował na jednej listewce skalę logarytmiczną, a na drugiej równomierną. Zamocował je tak, aby jedną z nich można było przesuwąć wzdłuż drugiej.

Powstał w ten sposób logarytmiczny suwak.



Mężczyzna używający suwaka logarytmicznego

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Przyrząd ten ułatwił znacznie obliczenia inżynierom, astronomom i przetrwał aż do lat 70 dwudziestego wieku. Za jego pomocą można wykonywać również działania na logarytmach. Na pewno zastanawiasz się po co komu suwak logarytmiczny, jeśli wartości logarytmów można obliczyć w łatwy sposób. I tu się mylisz – nie wszystkie wartości logarytmów są liczbami wymiernymi. Większość logarytmów to niestety liczby niewymierne. Zatem w praktyce posługujemy się ich przybliżeniami, a w tym właśnie pomagał suwak logarytmiczny.

W tym materiale udowodnimy, że istnieją logarytmy, będące liczbami niewymiernymi i będziemy wykonywać obliczenia posługując się ich przybliżeniami.

Twoje cele

- Wykonasz przybliżone obliczenia na logarytmach.
- Udowodnisz niewymierność logarytmu.
- Odczytasz przybliżone wartości logarytmów, korzystając ze skali logarytmicznej.

Przeczytaj

Korzystając z definicji, można obliczać wartości dokładne logarytmów. Jednak nie w każdym przypadku wartość logarytmu jest liczbą wymierną. Pokażemy teraz istnienie takich logarytmów.

Przykład 1

Udowodnimy, że liczba $\log_5 6$ jest niewymierna.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładamy więc, że $\log_5 6$ jest liczbą wymierną.

Istnieją zatem takie liczby całkowite, względnie pierwsze p i q , $q \neq 0$, że $\log_5 6 = \frac{p}{q}$.

Z definicji logarytmu wynika, że $5^{\frac{p}{q}} = 6$.

Podnosimy obie strony tej równości do potęgi q .

Stąd: $5^p = 6^q$.

Lewa strona równości jest podzielna przez 5, natomiast prawa nie.

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem założenie, że liczba $\log_5 6$ jest wymierna jest nieprawdziwe, co kończy dowód.

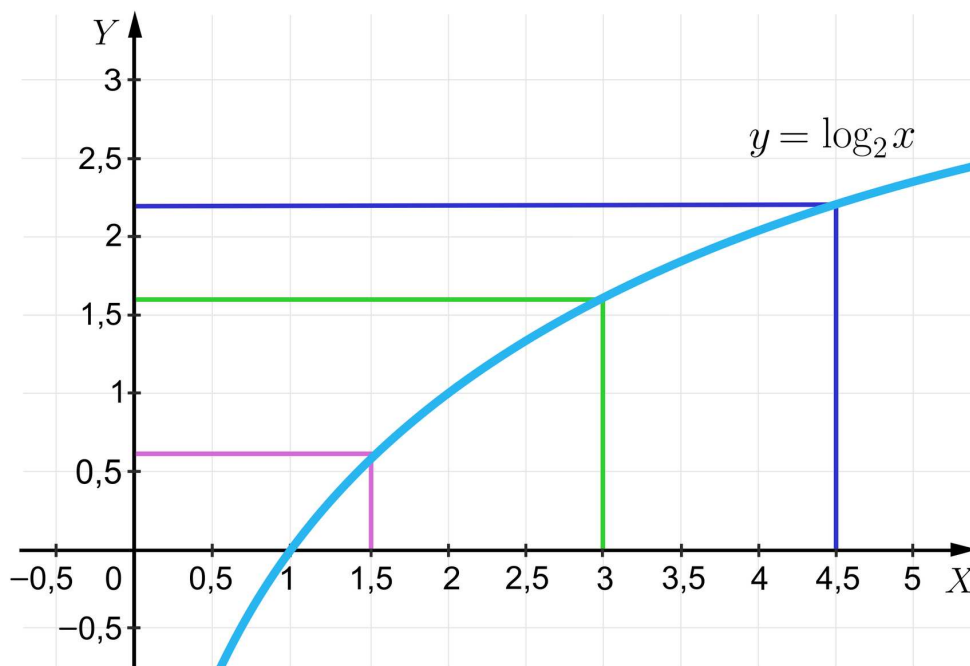
Przybliżone wartości logarytmów można odczytać, korzystając na przykład ze skali logarytmicznej.

Skala logarytmiczna to rodzaj skali pomiarowej, w której mierzona wielkość fizyczna jest przekształcona za pomocą logarytmów. Skala używana jest do przekształcania wielkości dodatnich, co wynika z definicji [logarytmu](#).

Skalę logarytmiczną można otrzymać, rzutując na oś Y rzędne punktów należących do wykresu funkcji $y = \log_a x$.

Przykład 2

Korzystając z wykresu funkcji $y = \log_2 x$ odczytamy przybliżone wartości niektórych logarytmów.



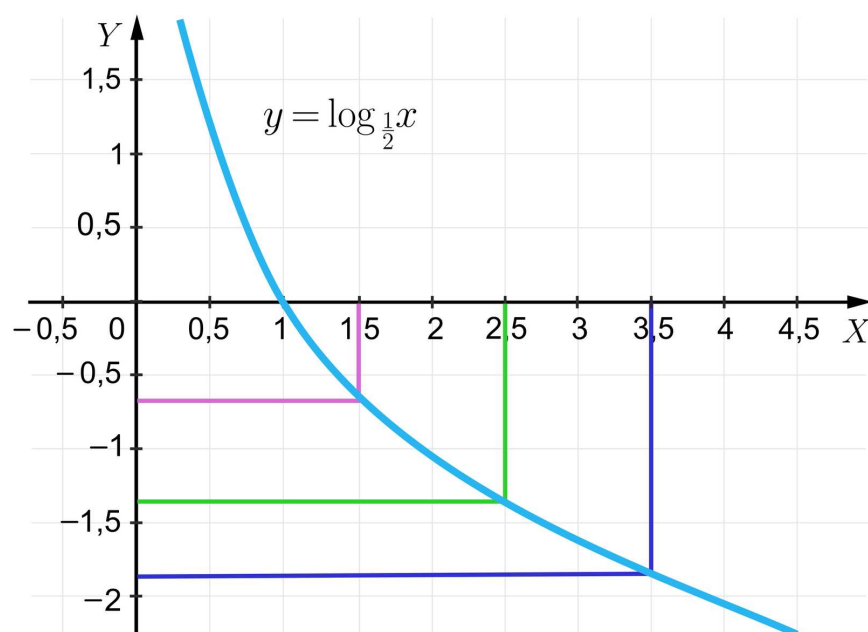
$$\log_2 1,5 \approx 0,6$$

$$\log_2 3 \approx 1,6$$

$$\log_2 4,5 \approx 2,2$$

Przykład 3

Korzystając z wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ odczytamy przybliżone wartości niektórych logarytmów.



$$\log_{\frac{1}{2}} 1,5 \approx -0,6$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2,5 \approx -1,3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3,5 \approx -1,8$$

Przybliżone wartości logarytmów możemy otrzymać też korzystając z tablic logarytmicznych. Tablice sporządzone są dla logarytmów o podstawie 10.

Przykład 4

Obliczymy przybliżoną wartość wyrażenia $W = \log_{10} 0,13 - 5 \cdot \log_{10} 0,52$ z dokładnością do 0,01.

Potrzebne dane odczytamy z tablic logarytmicznych.

x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
0,10	-1,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,11	-0,959	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,12	-0,921	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,13	-0,886	0,29	-0,538	0,54	-0,268

$$\log_{10} 0,13 \approx -0,886$$

$$\log_{10} 0,52 \approx -0,284$$

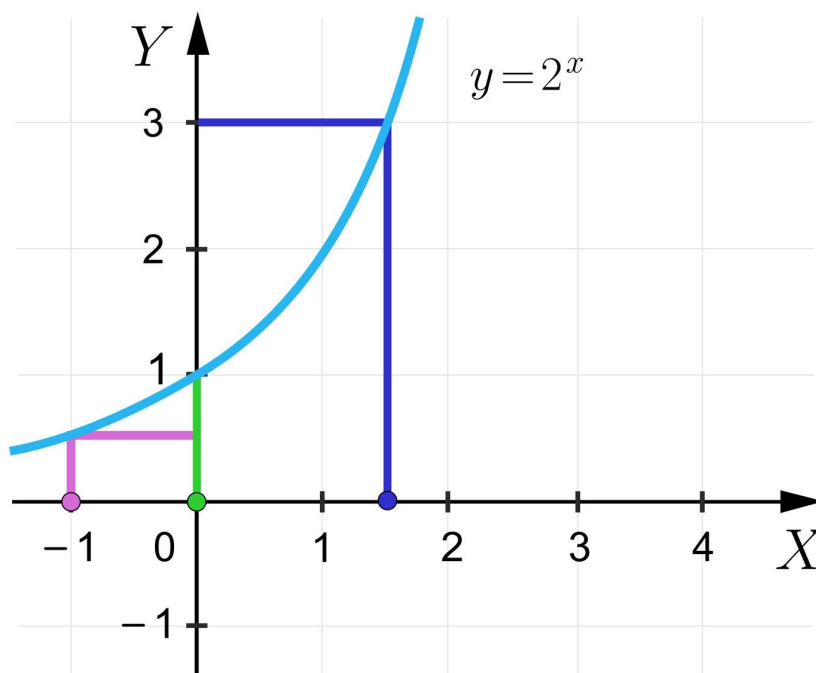
$$W \approx -0,886 + 5 \cdot (-0,284) \approx -0,89 - 1,42 = -2,31$$

Przybliżona wartość wyrażenia jest równa $(-2,31)$.

Do określania wartości logarytmów można wykorzystać też wykres funkcji wykładniczej.

Przykład 5

Korzystając z wykresu funkcji wykładniczej, wartości logarytmów odczytujemy na osi X .



$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_2 3 \approx 1,6$$

$$\log_2 0,5 = -1$$

Najczęściej przybliżone wartości logarytmów odczytujemy z kalkulatora lub komputera.

Wykorzystamy ten fakt, rozwiązując równanie, którego rozwiązaniem są liczby niewymierne.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie $5^x = 3$ i podamy wartość przybliżoną otrzymanego wyniku.

Z równości liczb dodatnich wynika równość ich potęg i logarytmów.

Równanie zapiszemy w postaci równoważnej, logarytmując obie strony równania. W tym celu wykorzystamy [logarytm](#) o podstawie 10.

$$\log_{10} 5^x = \log_{10} 3$$

$$x \cdot \log_{10} 5 = \log_{10} 3$$

$$x = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba niewymierna. Aby obliczyć wartość przybliżoną rozwiązania, odczytamy potrzebne liczby korzystając z kalkulatora.

$$\log_{10} 5 \approx 0,70$$

$$\log_{10} 3 \approx 0,48$$

$$x \approx \frac{0,48}{0,70} \approx 0,69$$

Rozwiązaniem równania jest liczba

$$x = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} \approx 0,69$$

Słownik

logarytm

liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, to wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją – rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DwjHgFAdj>

Film nawiązujący do treści materiału. Przykład pierwszy. Rozwiążemy równanie $11^x = 7^{x+4}$ z dokładnością do jednej setnej.

$$11^x = 7^{x+4} \Rightarrow \log_{10} 11^x = \log_{10} 7^{x+4} \Rightarrow x \cdot \log_{10} 11 = (x+4) \cdot \log_{10} 7 \Rightarrow x \cdot \log_{10} 11 = x \cdot \log_{10} 7 + 4 \cdot \log_{10} 7 \Rightarrow x \cdot \log_{10} 11 - x \cdot \log_{10} 7 = 4 \cdot \log_{10} 7$$

. Przykład drugi: Obliczymy wartość wyrażenia $W = \log_3 4 \cdot \log_5 10 + \log_7 240$ z dokładnością do jednej dziesiątej. Rozwiązanie:

$$W = \log_3 4 \cdot \log_5 10 + \log_7 240 \Rightarrow W \approx 1,26 \cdot 1,43 + 2,82 \Rightarrow W \approx 1,8018 \Rightarrow W \approx 1,8$$

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $198^x = 46^5$. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż liczbę niewymierną. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\log_2 1,5$

☐ $\log_2 \sqrt{2}$

☐ $\log_2 0,5$

☐ $\log_2 1024$

Ćwiczenie 2



Do którego z przedziałów liczbowych należy liczba $x = \log_4 389$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(8, 12)$

☐ $(-4, 0)$

☐ $(0, 4)$

☐ $(4, 8)$

Ćwiczenie 3



Oszacuj wartości logarytmów i uzupełnij zapisy, przeciągając odpowiedni znak.

$$\log_5 120 \quad \boxed{} \quad \log_5 10$$

$$\log_7 0,7 \quad \boxed{} \quad \log_7 17$$

$$\log_{0,4} 2 \quad \boxed{} \quad \log_{0,4} 5$$

$$\log_{0,1} 0,1 \quad \boxed{} \quad \log_{0,2} 0,2$$

<

>

=

=

>

<

>

=

<

Ćwiczenie 4



Korzystając z tablicy przybliżonych wartości funkcji $\log_{10} x$, uzupełnij obliczenia, zaokrąglając wynik do 0,01.

x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
0,10	-1,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,11	-0,959	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,12	-0,921	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,13	-0,886	0,29	-0,538	0,54	-0,268

Wpisz odpowiednie liczby.

$$\log_{10} 0,52 - \log_{10} 0,13 \approx \boxed{}$$

$$-\log_{10} 0,51^5 \approx \boxed{}$$

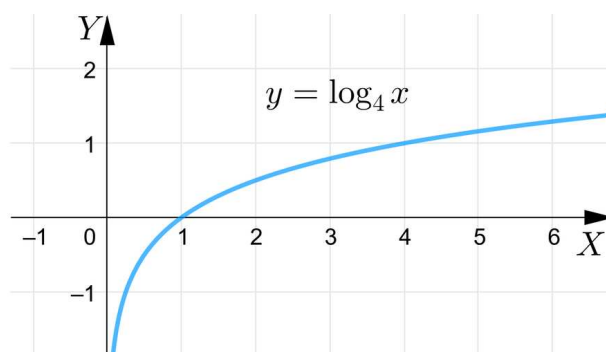
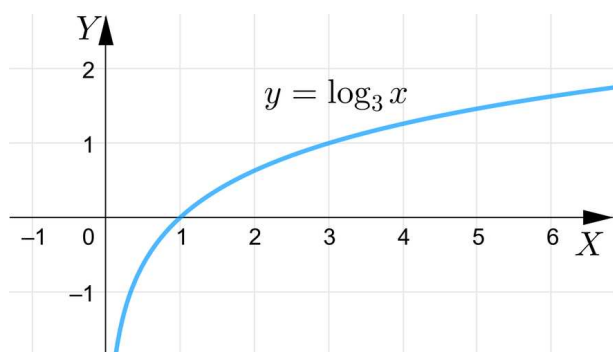
$$\log_{10} 0,11 \cdot \log_{10} 0,28 \approx \boxed{}$$

$$10^{\log_{10} 4} - \log_{10} 0,26 \approx \boxed{}$$

Ćwiczenie 5



Przyjrzyj się poniższej ilustracji.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $\log_3 2,5 \approx \log_4 3,2$

☐ $\log_3 0,7 < 0$

☐ $\log_3 5 + \log_4 5 > 4$

☐ $\log_4 3 = \log_3 4$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Aby znaleźć przybliżoną wartość liczby $x = \log_2 3$ rysujemy wykres funkcji wykładniczej $y =$

.

Odmierzamy na osi odcinek długości 3 i prowadzimy równoległą do osi

, aż do punktu przecięcia z .

Odcięta znalezionej punktu to szukana wartość .

wykresem

y

3^2

X

Y

osią X

x

osią Y

3^x

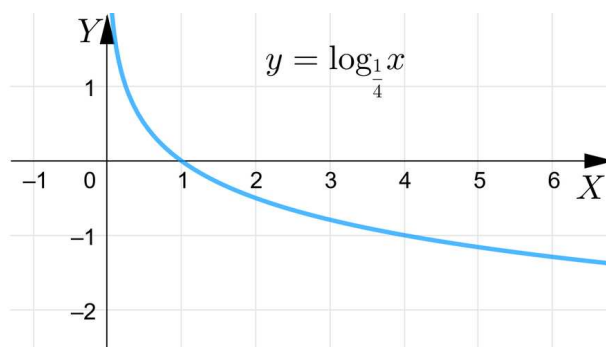
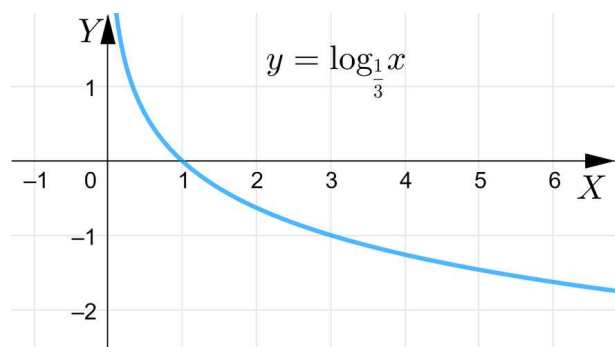
2^x

2^3

Ćwiczenie 7



Korzystając z wykresów podanych funkcji, porównaj liczby, przeciągając odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.



$\log_{0,25} 6$		$\log_{\frac{1}{3}} 1$
$\log_{\frac{1}{4}} 2$		$\log_{\frac{1}{3}} 4$
$\log_{\frac{1}{4}} 7$		$\log_{\frac{1}{3}} 7$
$\log_{\frac{1}{4}} 4$		$\log_{\frac{1}{3}} 3$

$=$

$<$

$=$

$<$

$>$

$=$

$>$

$>$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że liczba $\log_7 10$ jest niewymierna.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przybliżone wartości logarytmów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje przybliżone obliczenia na logarytmach
- udowadnia niewymierność logarytmu
- odczytuje przybliżone wartości logarytmów, korzystając ze skali logarytmicznej
- wybiera najkorzystaniejszy sposób obliczeń, prowadzący do jak najmniejszego błędu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karta kołowa
- drzewo umiejętności

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przypomina wiadomości na temat logarytmów.
2. Następnie nauczyciel poleca kilku uczniom (np. siedzącym w tym samym rzędzie) obliczenie wartości dokładnej zapisanych przez niego logarytmów.
3. Dyskusja – czy zawsze wartość logarytmu jest liczbą wymierną.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach pracują metodą karty kołowej. Otrzymane od nauczyciela kartony każda grupa dzieli na 4 części. Każda część ma być poświęcona jednemu ze sposobów wyznaczania wartości przybliżonych logarytmów.
2. Uczniowie poszukują materiałów do wypełnienia poszczególnych części, zapoznając się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” i z animacją.
3. Po wypełnieniu kart, przedstawiciele poszczególnych grup prezentują opracowane plansze i przemyślenia.
4. Uczniowie wspólnie typują najdogodniejszy sposób pozyskiwania wartości przybliżonych logarytmów.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.
3. W ramach oceny koleżeńskiej, uczniowie na drzewie umiejętności, pracując w parach, zaznaczają stopień opanowanych umiejętności koleżanki/kolegi w zakresie wykonywania obliczeń wartości dokładnych i przybliżonych logarytmów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie w domu ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako samouczek przed mini-kartkówką.