



Własności wartości bezwzględnej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Andrew Buchanan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Znasz już definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a . Wiesz też, że wartość bezwzględna liczby a jest odległością tej liczby od liczby zero na osi liczbowej.

Jest zatem zawsze liczbą nieujemną.

To właśnie jedna z własności wartości bezwzględnej. W tym materiale poznasz inne własności modułu i zobaczysz jak można je wykorzystywać np. przy rozwiązywaniu zadań typu „uzasadnij, że ...”.

Twoje cele

- Poznasz podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej a .
- Korzystając z własności modułu, uprościsz wyrażenia z wartością bezwzględną.
- Zastosujesz wartość bezwzględną liczby podczas dowodzenia twierdzeń.

Przeczytaj

Zapoznaj się z przykładami. Jakie własności wartości bezwzględnej możesz zauważyć? Porównaj swoje wnioski z wyróżnionymi własnościami.

Przykład 1

Oblicz.

$$|5| = 5 > 0$$

$$|-12| = 12 > 0$$

$$|0| = 0$$

Zauważ, że w każdym z przypadków otrzymujemy liczbę nieujemną.

Ważne!

$$|a| \geq 0, a \in \mathbb{R}$$

Przykład 2

Porównaj liczby $|a|$ i $|b|$.

Zauważ, że a i b , to liczby przeciwne.

a	b	$ a $	$ b $
-4	4	4	4
8	-8	8	8
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\sqrt[3]{16}$	$\sqrt[3]{16}$	$\sqrt[3]{16}$	$\sqrt[3]{16}$

Zwróć uwagę, że liczby w trzeciej i czwartej kolumnie są takie same.

A zatem wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe.

Ważne!

$$|a| = |-a|, a \in \mathbb{R}$$

Przykład 3

Przeanalizuj przykłady. Skorzystaj ze znanych Ci własności pierwiastków

- $\sqrt{a^2} = a$, dla $a \geq 0$,
- $\sqrt{a^2} = -a$, dla $a < 0$.

$$\sqrt{4^2} = 4 = |4|$$

$$\sqrt{(-4)^2} = 4 = |-4|$$

$$\sqrt{6^2} = |6| = 6$$

$$\sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2} = \left|-\frac{5}{7}\right| = \frac{5}{7}$$

Na pewno widzisz, że w powyższych przykładach otrzymany wynik jest zawsze liczbą dodatnią. Przykłady te obrazują kolejną własność wartości bezwzględnej.

Jeśli liczba x pod pierwiastkiem jest kwadratem pewnego wyrażenia a , to pierwiastek z liczby x jest wartością bezwzględną z liczby a .

Ważne!

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}$$

Przykład 4

Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$, korzystając z powyższej własności.

Korzystając z własności: $\sqrt{a^2} = |a|$, otrzymujemy:

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}|$$

Wyrażenie w module jest ujemne (sprawdź to), a zatem korzystając z algebraicznej definicji własności bezwzględnej dla $a < 0$, możemy zapisać:

$$\underbrace{|2 - \sqrt{5}|}_{2 - \sqrt{5} < 0} = \sqrt{5} - 2$$

A zatem:

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$$

Ważne!

Wartość bezwzględna iloczynu liczb a i b jest równa iloczynowi wartości bezwzględnych liczb a i b .

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Przykład 5

Znajdź liczbę x , spełniającą warunek $|4x - 8| = 16$.

Możemy tu skorzystać z własności modułu przedstawionej powyżej.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

$$|4x - 8| = 16$$

W liczbie pod modułem wyłączamy przed nawias liczbę 4.

$$|4 \cdot (x - 2)| = 16$$

Korzystając z powyższej własności zapisujemy moduł z iloczynu dwóch liczb, jako iloczyn dwóch modułów.

$$|4| \cdot |(x - 2)| = 16$$

Obliczamy wartość bezwzględną liczby 4.

$$4 \cdot |(x - 2)| = 16$$

Dzielimy obie strony równania przez 4.

$$4 \cdot |(x - 2)| = 16 \quad |: 4$$

Otrzymujemy wyrażenie

$$|x - 2| = 4$$

Wiesz, że:

$$4 = |4| \text{ lub } 4 = |-4|$$

Stąd:

$$x - 2 = 4 \text{ lub } x - 2 = -4$$

A zatem:

$$x = 6 \text{ lub } x = -2.$$

Ważne!

Wartość bezwzględna ilorazu liczb a i b jest równa ilorazowi wartości bezwzględnych liczb a i b .

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}/\{0\}$$

Przykład 6

Znajdź liczbę x , spełniającą warunek $\left| \frac{x-5}{2} \right| = 3$.

Możemy tu skorzystać z własności modułu przedstawionej powyżej.

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}/\{0\}$$

$$\left| \frac{x-5}{2} \right| = 3$$

Korzystając z powyższej własności zapisujemy moduł z ilorazu dwóch liczb, jako iloraz dwóch modułów.

$$\frac{|x-5|}{|2|} = 3$$

Obliczamy wartość bezwzględną liczby 2.

$$\frac{|x-5|}{2} = 3$$

Mnożymy obie strony równania przez 2.

$$\frac{|x-5|}{2} = 3 \quad | \cdot 2$$

Otrzymujemy wyrażenie

$$|x - 5| = 6$$

Wiesz, że:

$$6 = |6| \text{ lub } 6 = |-6|$$

Stąd:

$$x - 5 = 6 \text{ lub } x - 5 = -6$$

A zatem:

$$x = 11 \text{ lub } x = -1.$$

Słownik

wartość bezwzględna iloczynu liczb a i b

iloczyn wartości bezwzględnych liczb a i b

wartość bezwzględna ilorazu liczb a i b

iloraz wartości bezwzględnych liczb a i b

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem pokazującym zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach.

Polecenie 2

Udowodnij, że liczba $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ jest wymierna.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz liczby, które spełniają warunek $\sqrt{x^2} = 16$.

8

-16

16

4

-8

-4

Ćwiczenie 2



Znajdź wyrażenia o tej samej wartości. Połącz odpowiednie pary.

$$|-3\pi|$$

$$\left|\frac{ab}{2}\right|$$

$$|x| : |-5|$$

$$2 - \sqrt{2}$$

$$\frac{|a| \cdot |b|}{|2|}$$

$$|-3| \cdot |\pi|$$

$$|2 - \sqrt{2}|$$

$$\left|\frac{x}{5}\right|$$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

Nierówność $|x| \leq -3$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

Nierówność $|x| < -2$ jest sprzeczna.

Istnieje $x \in \mathbb{R}$, spełniający warunek $|x - 1| = -5$.

Warunek $|2x + 4| = 0$ jest spełniony dla dokładnie jednej liczby rzeczywistej x .

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci . Przyciągnij poprawną odpowiedź.

Wyrażenie	Najprostsza postać wyrażenia
$\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} + \sqrt{3}$	<input type="text"/>
$ 1 + \sqrt{2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$	<input type="text"/>
$\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{3}$	<input type="text"/>
$\sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$	<input type="text"/>

$3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

$2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Ćwiczenie 6



Czy warunek $\sqrt{x^2} = -x$ jest spełniony przez:

$x = 0$

wszystkie liczby ujemne

wszystkie liczby niedodatnie

wszystkie liczby dodatnie

wszystkie liczby nieujemne

Ćwiczenie 7



Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{53 - 10\sqrt{6}}$. Przeciagnij prawidłową odpowiedź.

Wartość wyrażenia

$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{53 - 10\sqrt{6}}$ wynosi:

$3 + 3\sqrt{2} + 6$

$3 + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}$

$3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Ćwiczenie 8



Udowodnij równość $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności wartości bezwzględnej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej a
- korzystając z własności modułu, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną
- stosuje wartość bezwzględną liczby podczas dowodzenia twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda odwróconej klasy
- analiza przypadku
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem infografiki

Formy pracy:

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego
- praca indywidualna

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą odwróconej klasy.
3. W tym celu, w domu, przygotowują informacje na temat własności wartości bezwzględnej liczby.

Faza realizacyjna:

1. Pracując w parach, uczniowie dyskutują nad przygotowanymi w domu materiałami. Porównują swoje notatki, dyskutują nad wątpliwościami.
2. Trzy chętne zespoły prezentują wiadomości, omawiając kolejno tematy:
 - Przypomnienie graficznej definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.
 - Przypomnienie algebraicznej definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.
 - Przedstawienie własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.
3. Uczniowie zapoznają się przykładami zawartymi w części „Przeczytaj” oraz infografiką.
4. Konsultując z nauczycielem, uczniowie wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym.
5. Uczniowie rozwiązują zadania zawarte w materiale multimedialnym. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie utrwalają poznane własności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7, 8 zawarte w części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wartość bezwzględna - definicja
- Wartość bezwzględna liczby
- Liczby wymierne. Wartość bezwzględna
- Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej – pojęcie algebraiczne
- Równanie z wartością bezwzględną
- Zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
- Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną
- Zadania prowadzące do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną
- Interpretacja geometryczna nierówności typu $x-a < b$

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz infografikę do przygotowania materiału w domu lub do utrwalenia informacji po lekcji.