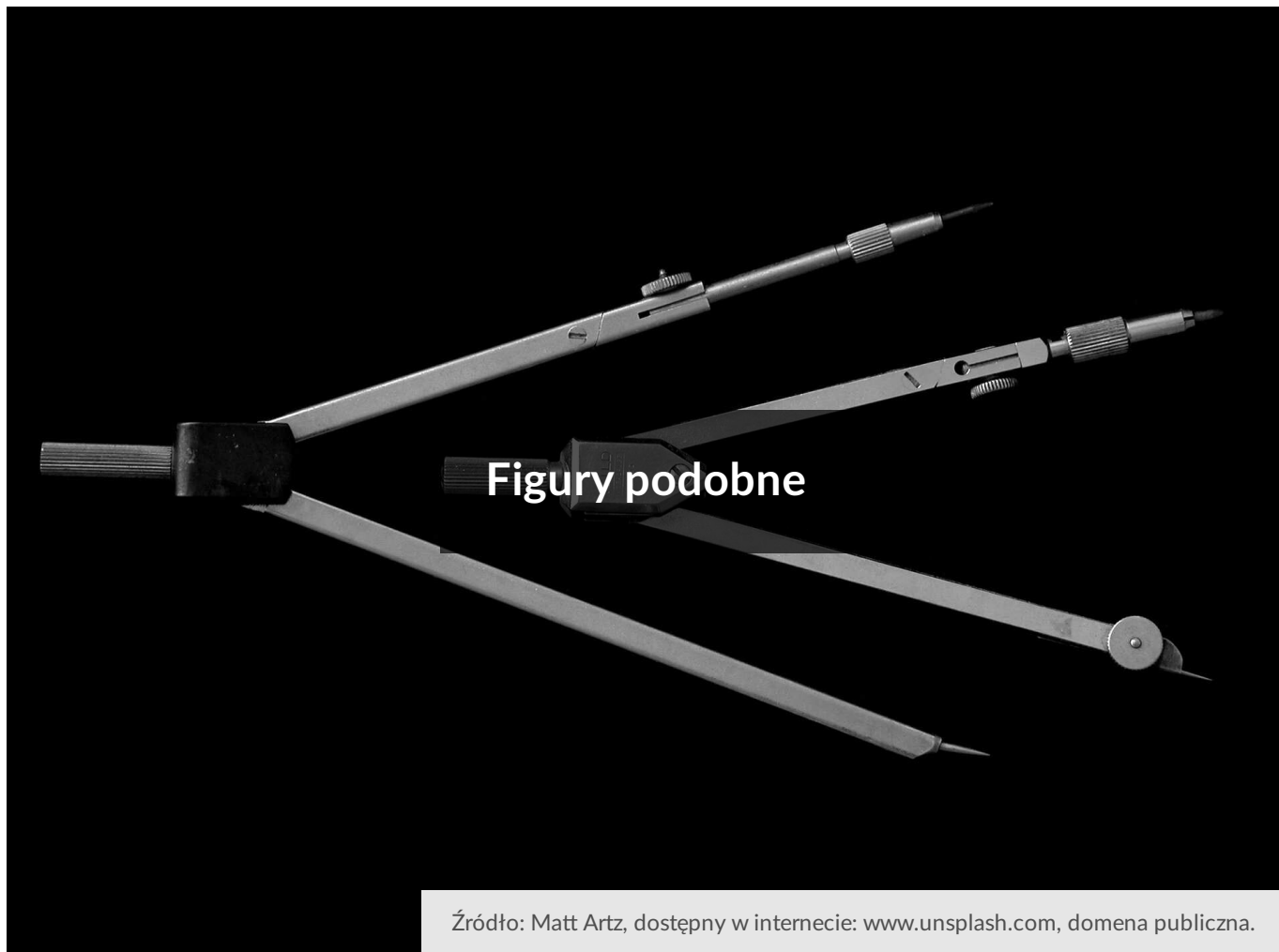


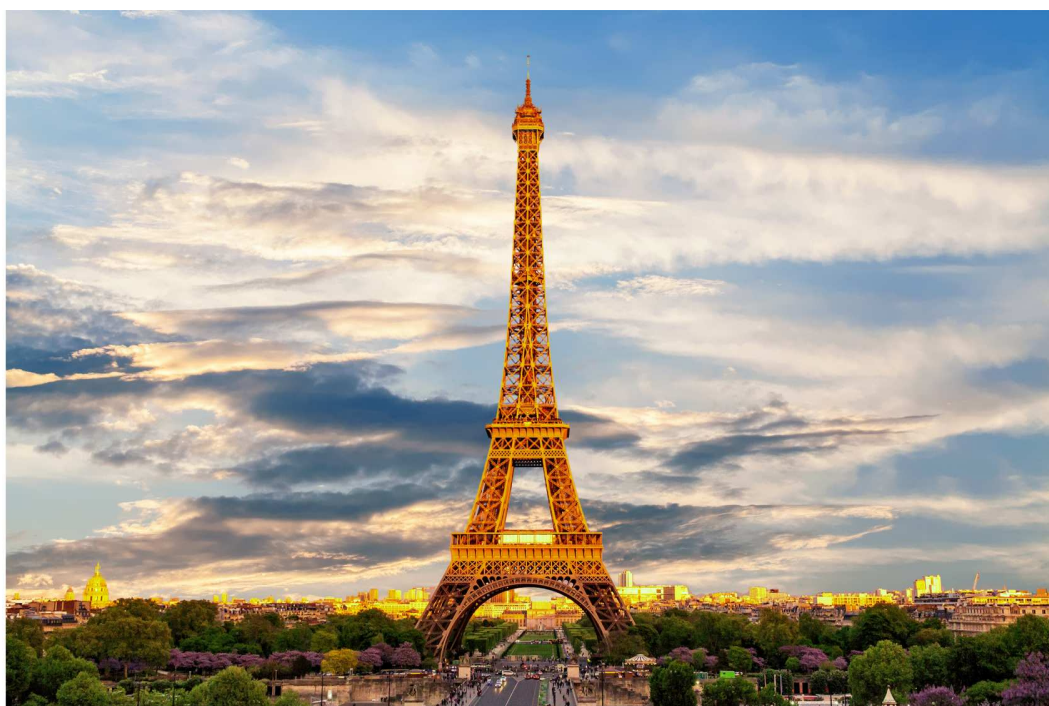


Figury podobne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W życiu codziennym bardzo często spotykamy się z przekształceniem, które nosi nazwę podobieństwa. Na przykład możemy zaobserwować wieżę Eiffla w rzeczywistych rozmiarach w Paryżu oraz jej pomniejszenie w parku miniatur.



Wieża Eiffla, Paryż, Francja

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W materiale omówimy, czym jest podobieństwo, podamy jego cechy oraz wprowadzimy pojęcie skali podobieństwa figur, chociaż nie tylko figury płaskie, ale bryły geometryczne też mogą być podobne. Opierając się na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz definicję podobieństwa dwóch figur.
- Uzasadnisz podobieństwo dwóch figur.
- Obliczysz skalę podobieństwa figur podobnych za pomocą różnych zależności.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wprowadźmy definicję i własności **podobieństwa**.

Definicja: Podobieństwo

Przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które zmienia odległość każdego dwóch punktów w pewnym stosunku nazywamy podobieństwem.

Definicja: Podobieństwo o skali k

Podobieństwem o skali $k > 0$ nazywamy takie przekształcenie P płaszczyzny na tę samą płaszczyznę (mówimy wówczas o podobieństwie płaszczyzny) lub przestrzeni na tę samą przestrzeń (mówimy wówczas o podobieństwie przestrzeni), w którym

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

gdzie:

A i B – są dwoma dowolnymi punktami,

A' i B' – obrazami tych punktów w przekształceniu P .

Wobec tego definicję figur podobnych możemy sformułować następująco:

Definicja: Figury podobne

Figury nazywamy podobnymi wtedy, gdy jedna z nich jest obrazem drugiej w pewnym podobieństwie. Relację podobieństwa figur oznaczamy symbolem „ \sim ”. Fakt, że figura F jest podobna do figury G możemy zapisać następująco:

$$F \sim G$$

Skalę $k > 0$ tego podobieństwa nazywamy wtedy skalą podobieństwa figury G do figury F .

Własność: Własności podobieństwa

Własności podobieństwa:

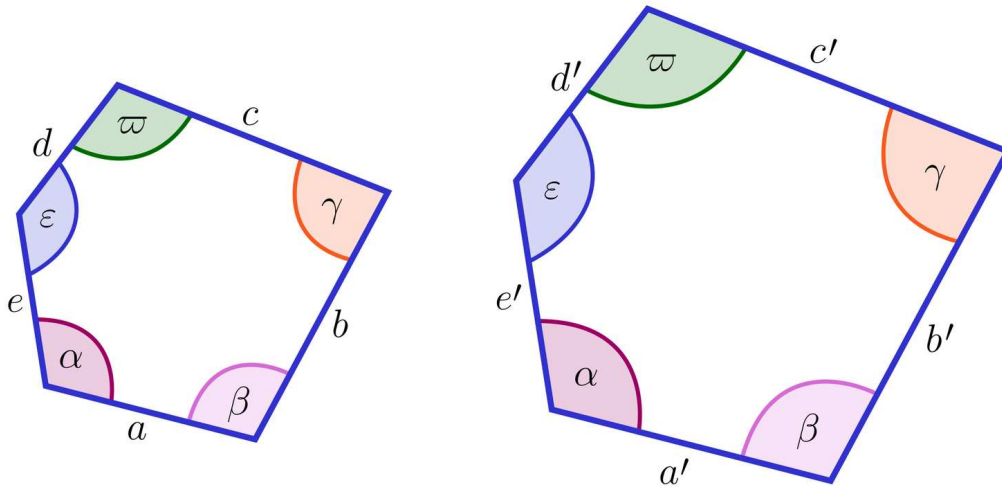
- zachowuje stosunek odcinków,
- przekształca kąt w kąt do niego przystający,
- zachowuje współliniowość i uporządkowanie punktów na prostej.

O figurach, mających ten sam kształt, a różniących się co najwyżej wielkością mówimy, że są podobne.

Wprowadźmy definicję wielokątów podobnych.

Definicja: Wielokąty podobne

O dwóch wielokątach mówimy, że są podobne, jeśli miary ich kątów są odpowiednio równe, a długości odpowiednich boków są proporcjonalne.

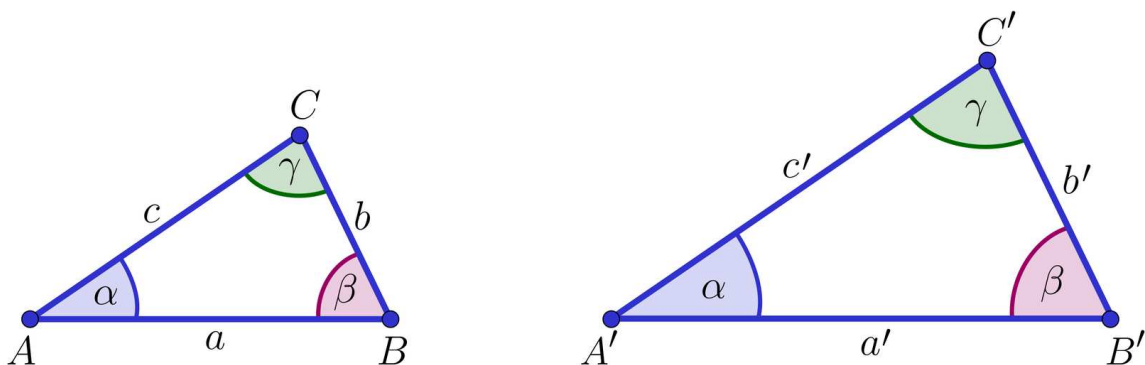


Zatem

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e}$$

Współczynnik proporcjonalności odpowiadających sobie boków w wielokątach podobnych będziemy nazywać **skalą podobieństwa** i oznaczać jako k .

Założmy, że trójkąty $A'B'C'$ i ABC z rysunków są podobne.



Wówczas skalę podobieństwa k tych trójkątów obliczamy z zależności:

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

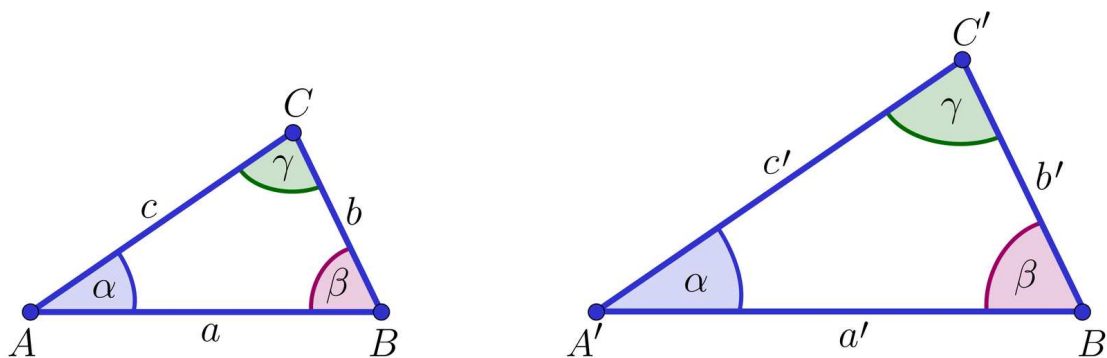
Twierdzenie: o skali podobieństwa

Jeżeli figura o obwodzie długości L' jest podobna do figury o obwodzie długości L , to skalę podobieństwa tych figur obliczamy ze wzoru:

$$k = \frac{L'}{L}$$

Dowód

Założmy bez utraty ogólności, że trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali k .



Zatem:

$$k = \frac{a'}{a}, \text{ czyli } a' = k \cdot a$$

$$k = \frac{b'}{b}, \text{ czyli } b' = k \cdot b$$

$$k = \frac{c'}{c}, \text{ czyli } c' = k \cdot c$$

Wobec tego:

$$\frac{L'}{L} = \frac{a'+b'+c'}{a+b+c} = \frac{k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c}{a+b+c} = \frac{k \cdot (a+b+c)}{a+b+c} = k$$

Jeżeli skala podobieństwa $k = 1$, to przekształcenie jest **izometrią**.

Twierdzenie: o skali figur podobieństwa figur podobnych

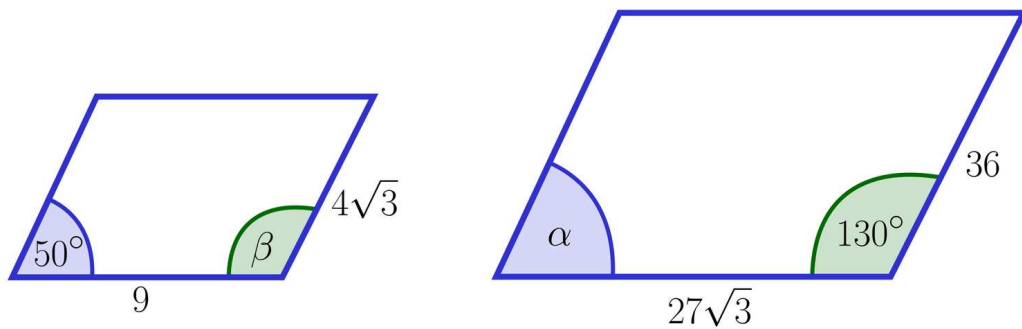
Jeżeli figura F jest podobna do figury G w skali k , to figura G jest podobna do figury F w skali $\frac{1}{k}$.

Ważne!

- Każde dwa wielokąty foremne, mające tę samą liczbę boków są podobne.
- Każde dwa odcinki są podobne.
- Każde dwa koła są podobne.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy równoległoboki przedstawione na poniższych rysunkach są podobne.



Rozwiązanie:

Ponieważ figury przedstawione na rysunkach są równoległobokami, zatem $\alpha = 50^\circ$ oraz $\beta = 130^\circ$.

Jeżeli figury mają te same kąty, to wystarczy sprawdzić, czy odpowiednie boki są proporcjonalne.

Wobec tego:

$$\frac{36}{4\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{9}$$

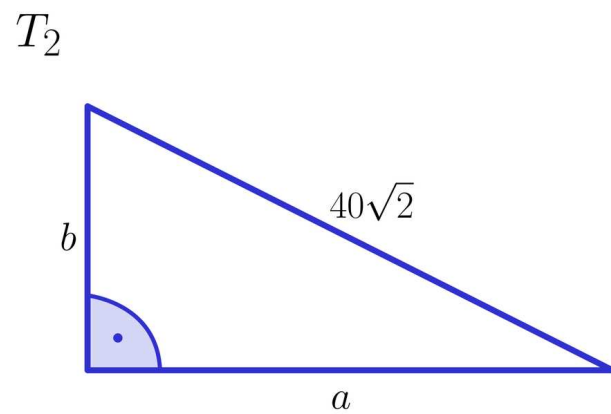
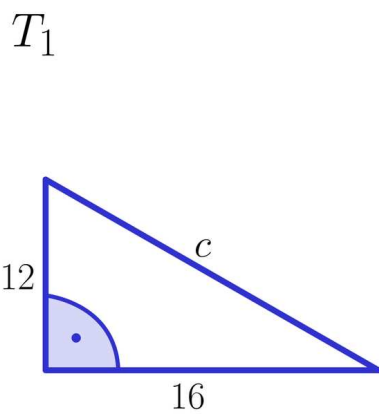
Ponieważ równość jest prawdziwa, zatem równoległoboki z rysunku są podobne.

Przykład 2

Trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości 12 i 16 jest podobny do trójkąta prostokątnego T_2 o przeciwprostokątnej długości $40\sqrt{2}$. Obliczymy obwód trójkąta T_2 .

Rozwiązanie:

Narysujmy rysunki pomocnicze trójkątów T_1 i T_2 i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przeciwprostokątnej c trójkąta T_1 .

Zatem

$$12^2 + 16^2 = c^2$$

$$c^2 = 400$$

$$c = 20$$

Obliczamy skalę podobieństwa k trójkąta T_2 do trójkąta T_1 .

Wobec tego:

$$k = \frac{40\sqrt{2}}{20} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = \frac{a}{16}$$

$$a = 32\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = \frac{b}{12}$$

$$b = 24\sqrt{2}$$

Zatem obwód trójkąta T_2 jest równy:

$$L = 24\sqrt{2} + 32\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 96\sqrt{2}$$

Ważne!

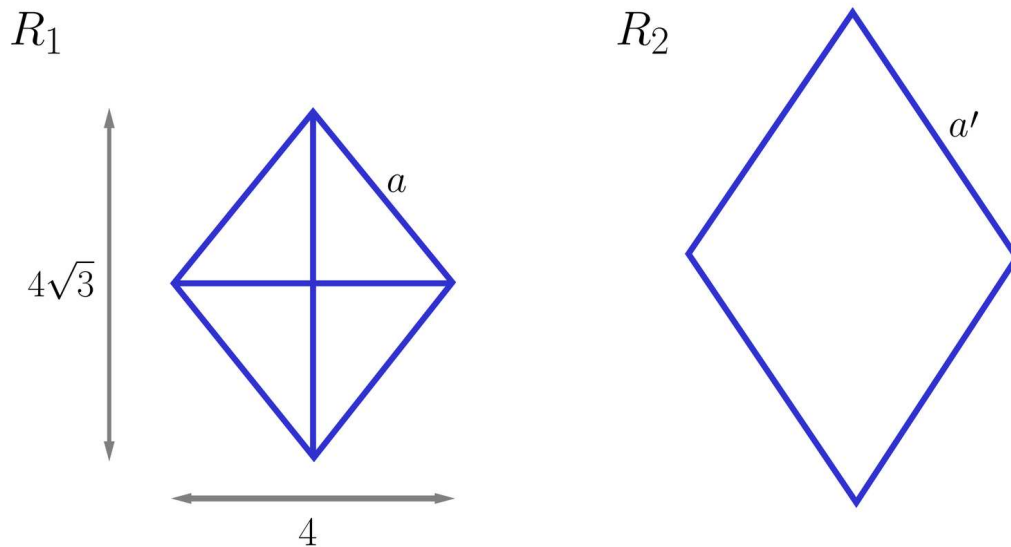
Jeżeli dwie figury są podobne, to każde odpowiadające sobie odcinki w obu figurach są do siebie proporcjonalne. Tymi odcinkami są (o ile istnieją) wysokości, przekątne, środkowe itp.

Przykład 3

Dwa romby są podobne w skali $\frac{5}{3}$. Obliczmy obwód każdego z nich, jeżeli długości przekątnych mniejszego rombu są równe $4\sqrt{3}$ i 4.

Rozwiązanie:

Narysujmy dwa romby R_1 i R_2 , które są podobne i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższych rysunkach.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość boku mniejszego rombu.

Zatem:

$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4$$

Ponieważ skala $k = \frac{5}{3}$, zatem:

$$k = \frac{a'}{a}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{a'}{4}$$

$$a' = \frac{20}{3}$$

Wobec tego obwody rombów R_1 i R_2 wynoszą odpowiednio:

$$L = 4 \cdot 4 = 16$$

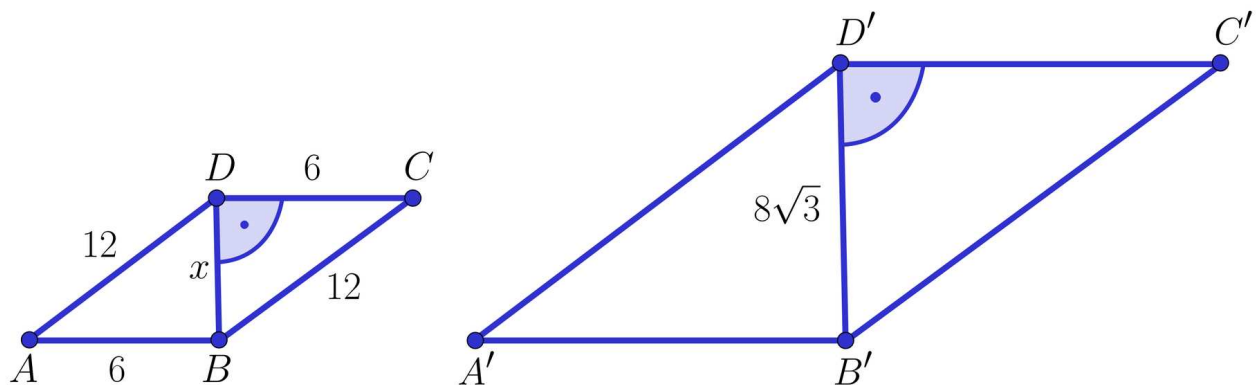
$$L' = 4 \cdot \frac{20}{3} = \frac{80}{3}$$

Przykład 4

Dane są równoległoboki $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$, które są podobne. Krótsza przekątna równoległoboku $ABCD$ tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Obliczmy obwody obu równoległoboków, jeżeli boki równoległoboku $ABCD$ wynoszą 6 i 12, a krótsza przekątna równoległoboku $A'B'C'D'$ ma długość $8\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy równoległoboki $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$, które są podobne oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunkach.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej x w równoległoboku $ABCD$.

Zatem

$$x^2 + 6^2 = 12^2$$

$$x^2 + 36 = 144$$

$$x^2 = 108$$

$$x = 6\sqrt{3}.$$

Niech k będzie skalą podobieństwa równoległoboku $A'B'C'D'$ do równoległoboku $ABCD$.

$$\text{Wtedy } k = \frac{8\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.$$

Obwód L równoległoboku $ABCD$ wynosi:

$$L = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 12 + 24 = 36.$$

Niech L' będzie obwodem równoległoboku $A'B'C'D'$.

Jeżeli skala podobieństwa $A'B'C'D'$ do równoległoboku $ABCD$ wynosi $\frac{4}{3}$, to:

$$\frac{4}{3} = \frac{L'}{36}.$$

Wobec tego $L' = 48$.

Zatem obwody omawianych równoległoboków wynoszą odpowiednio 36 i 48.

Przykład 5

Wiadomo, że suma obwodów dwóch figur podobnych wynosi 224. Wyznamy obwody tych figur, jeżeli wiadomo, że ich skala podobieństwa wynosi $\frac{2}{5}$.

Rozwiązanie:

Niech L_1 i L_2 będą obwodami dwóch figur podobnych.

Do wyznaczenia wartości L_1 i L_2 rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = 224 \\ \frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Układ równań przekształcamy do postaci:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = 224 \\ L_1 = \frac{2}{5} \cdot L_2 \end{cases}$$

Wobec tego:

$$\frac{2}{5}L_2 + L_2 = 224$$

$$\frac{7}{5}L_2 = 224$$

$$L_2 = 224 \cdot \frac{5}{7} = 160$$

Zatem:

$$L_1 = 224 - 160 = 64$$

Zatem obwody tych figur wynoszą odpowiednio 64 i 160.

Słownik

podobieństwo

przekształcenie geometryczne, które zachowuje stosunek odległości punktów płaszczyzny

przystawanie

identyczność kształtu i wielkości figur

cechy podobieństwa trójkątów

warunki konieczne i wystarczające, aby dwa trójkąty były podobne

izometria

przekształcenie geometryczne, przy którym odległość punktów nie ulega zmianie, np. przesunięcie równoległe, obrót, symetria względem prostej, punktu lub płaszczyzny

skala podobieństwa

liczba dodatnia, wyrażająca stosunek odpowiadających sobie odcinków w figurach podobnych

Galeria zdjęć interaktywnych

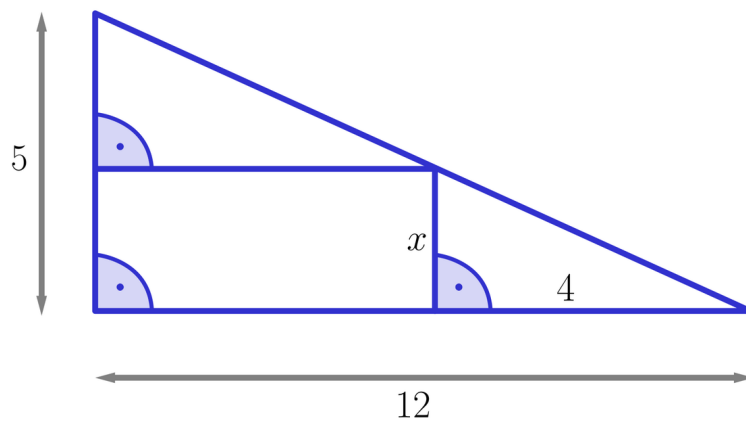
Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami figur podobnych, które możemy zauważyć w różnych figurach geometrycznych.

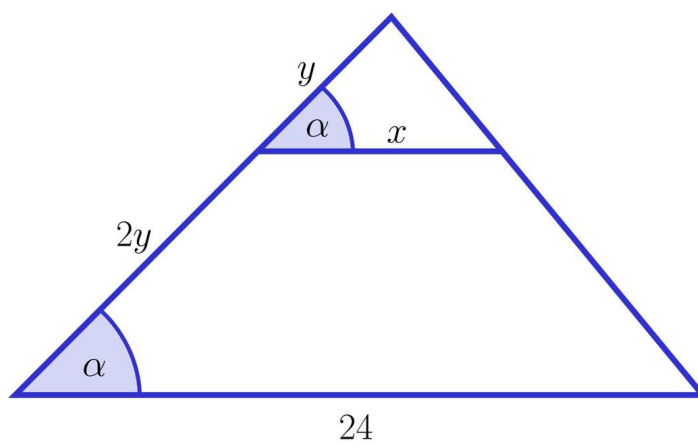
Polecenie 2

Wyznacz długość odcinka x w każdym z poniższych trójkątów.

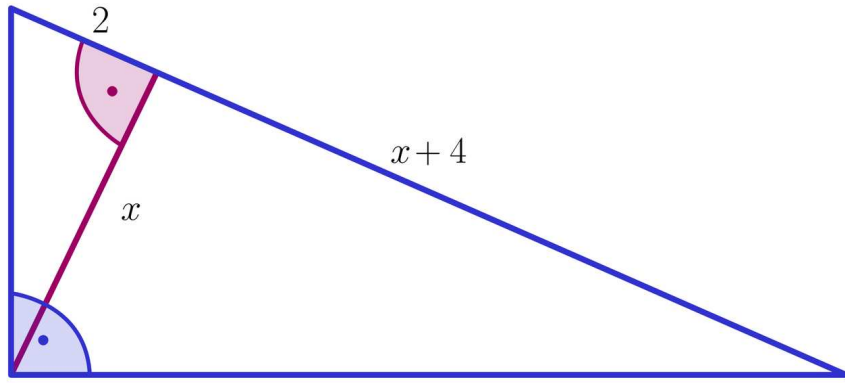
a)



b)



c)



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

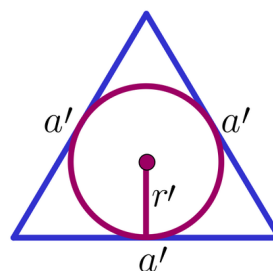
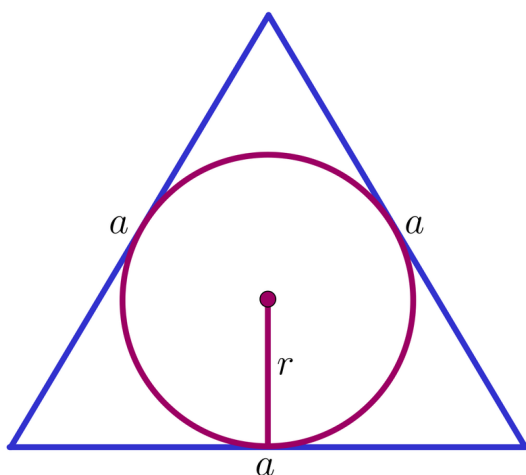


Ćwiczenie 2



Wskaż wszystkie zdania, które są prawdziwe.

Trójkąty równoboczne przedstawione na poniższych rysunkach są podobne w skali $k = \sqrt{2}$.



Ćwiczenie 3



Kwadrat K_1 , w którym przekątna jest o 2 dłuższa od boku jest podobny do kwadratu K_2 w skali $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz obwód kwadratu K_2 .

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wiadomo, że suma obwodów dwóch figur podobnych wynosi 264. Wyznacz obwody tych figur, jeżeli wiadomo, że ich skala podobieństwa wynosi $\frac{5}{6}$.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Boki czworokąta $ABCD$ mają długości: 8, 10, 12, 14. Suma dwóch najkrótszych boków czworokąta $A'B'C'D'$, który jest podobny do czworokąta $ABCD$ wynosi 45. Oblicz długości boków w czworokącie $A'B'C'D'$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Figury podobne

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa definicję podobieństwa dwóch figur;
- uzasadnia podobieństwo dwóch figur;
- oblicza skalę podobieństwa figur podobnych;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Figury podobne”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów - służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wielokąty podobne](#)
- [Figury podobne](#)

Wskazówki metodyczne:

- „Galerię zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy zależności występujących w figurach podobnych lub do realizacji tematu „Pola figur podobnych”.