



Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych $\frac{\pi}{2} + \alpha$,

$$\frac{3\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/sygnalizatory-kolor%C3%B3w-instalacja-3929771/>.

Wzory redukcyjne były stosowane już w VI wieku n.e. przez hinduskich uczonych. Dzięki nim wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez sprowadzenie go do przypadku kąta ostrego. Wynikają one z symetrii wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych. Wykres funkcji **sinus** jest symetryczny względem dowolnego punktu $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, a także symetryczny względem dowolnej prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dla wykresu funkcji **cosinus** środkiem symetrii jest dowolny punkt $(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, a osią symetrii – prosta o równaniu: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dla wykresu funkcji **tangens** mamy tylko symetrie środkowe względem punktów $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

W tym materiale wykorzystamy poznane wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ i $\frac{\pi}{2} - \alpha$ do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych i rozwiązywania zadań.

Twoje cele

- Wykorzystasz poznane wzory redukcyjne do rozwiązywania zadań.
- Zastosujesz „siatkę znaków” do określania znaku funkcji trygonometrycznych.
- Usystematyzujesz wiedzę o wzorach redukcyjnych i związkach między funkcjami trygonometrycznymi.

Przeczytaj

Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

Zbierzemy teraz informacje dotyczące wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \beta$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$+\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$+\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Przypomnijmy znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach ([siatka znaków](#)).

Kąt β	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$	$(\pi; \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$
$\sin \beta$	+	+	-	-
$\cos \beta$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \beta$	+	-	+	-

Zauważ, że powyższe [wzory redukcyjne](#) możesz łatwo zapamiętać, znając znaki funkcji trygonometrycznych w zależności od ćwiartki i stosując zasadę, że we wzorach na $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ funkcje przechodzą na kofunkcje (sinus na cosinus, cosinus na sinus, tangens na funkcję $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$).

W zapamiętaniu znaków funkcji trygonometrycznych w zależności od ćwiartki pomóc może rysunek:

Przykład 1

Wykażemy, że:

- $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$,
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

Rozwiązanie

Wykazując powyższe zależności, wykorzystamy [wzory redukcyjne](#) dla kątów $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

- $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$$c. \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}$$

Przykład 2

Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, obliczmy $\frac{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$.

Rozwiązanie

Ponieważ:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sin \alpha,$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha,$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha,$$

to:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} &= \frac{\left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \cdot (-\sin \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ze wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ wyznaczamy $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

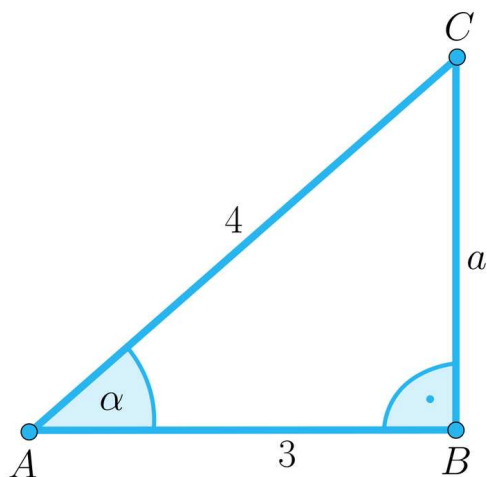
Po podstawieniu $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ otrzymujemy $\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy $\frac{7}{16}$. To $\frac{\sqrt{7}}{4}$ i $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Ponieważ $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, to rozwiązaniem jest $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Możemy również wyznaczyć $\sin \alpha$, wykorzystując trójkąt prostokątny o przyprostokątnej leżącej przy kącie α długości 3 i przeciwprostokątnej długości równej 4. Oznaczając $b = 3$ oraz $c = 4$, otrzymamy następującą równość:

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} = \frac{b}{c}.$$



Długość drugiej przyprostokątnej wyliczamy z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$.

Wyznaczamy a .

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy 7. To $\sqrt{7}$ i $-\sqrt{7}$.

Długości boków są zawsze dodatnie, więc $a = \sqrt{7}$.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Wyliczoną wartość $\sin \alpha$ podstawiamy do poniższego wyrażenia.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = 4 \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Pozbyliśmy się niewymierności w mianowniku, rozszerzając ułamek (poprzez mnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{7}$).

$$\text{Odp.: } \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 4 \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia: $\frac{2 - \cos \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}}$.

Rozwiązanie

I sposób:

Zastosujemy wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

Ponieważ

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{8\pi}{6} = \cos \frac{9\pi - \pi}{6} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{6\pi + \pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = -1,$$

to podstawiając wyliczone wartości, mamy:

$$\frac{2 - \cos \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}} = \frac{2 + \sin \frac{\pi}{6}}{-\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{-1} = -\frac{5}{2}.$$

II sposób:

Skorzystamy ze wzorów redukcyjnych dla kątów $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$.

Ponieważ

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{3\pi + \pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{8\pi - \pi}{4} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1,$$

to podstawiając wyliczone wartości mamy:

$$\frac{2 - \cos \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}} = \frac{2 + \cos \frac{\pi}{3}}{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{-1} = -\frac{5}{2}.$$

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie: $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Rozwiązanie

Ponieważ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

to:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - (-\sin \alpha)^3 = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Po wyłączeniu $\sin \alpha$ przed nawias i podstawieniu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ mamy:

$$\sin \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin \alpha.$$

Przykład 5

Udowodnimy, że równość

$$\left(1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right) \cdot \left(\frac{-1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$$
 jest tożsamością dla $x \neq k\pi$.

Rozwiązanie

Przekształcimy najpierw prawą stronę równości:

$$P = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Przekształcimy teraz lewą stronę równości:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right) \cdot \left(\frac{-1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) \\ &= (1 - \cos \alpha) \cdot \left(\frac{-1}{-\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = (1 - \cos \alpha) \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha = P \end{aligned}$$

Ponieważ lewa strona równości jest równa stronie prawej, zatem dla $x \neq k\pi$ równość jest tożsamością.

Słownik

wzory redukcyjne

wzory pozwalające wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta α za pomocą wartości funkcji kąta ostrego

siatka znaków

nazwa tabeli, w której zestawiono znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, w której prezentowane są metody obliczania wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych dla kątów: $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ i $\frac{3\pi}{2} + \alpha$. Wykorzystaj te metody w zadaniach, swoje rozwiązania porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpLL4Rwo0>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący obliczania wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych.

Polecenie 2

Wykorzystując wzory redukcyjne dla kątów $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ i $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, oblicz wartość wyrażenia: $\left(\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}\right)^2 - 2 \sin \frac{7\pi}{6} \cdot \cos \frac{4\pi}{3}$.

Polecenie 3

Wiedząc, że $\sin \alpha = 0,4$ i α jest kątem ostrym, oblicz wartość wyrażenia:

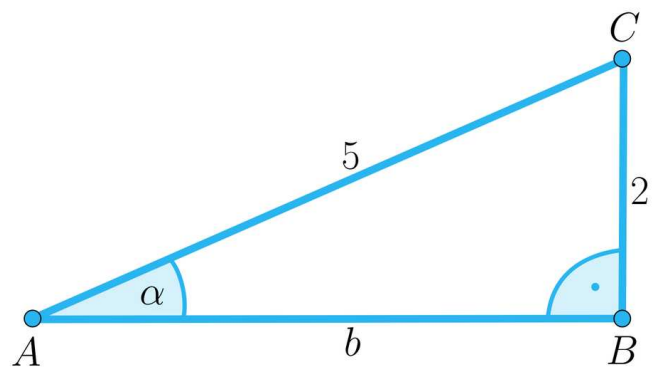
$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

$$= \left(\cos \alpha - \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot (-\cos \alpha) \Rightarrow$$

$$= -\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha.$$

Cosinus kąta α wyznaczymy, wykorzystując trójkąt prostokątny o przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α długości 2 i przeciwprostokątnej długości 5, gdyż:

$$\sin \alpha = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



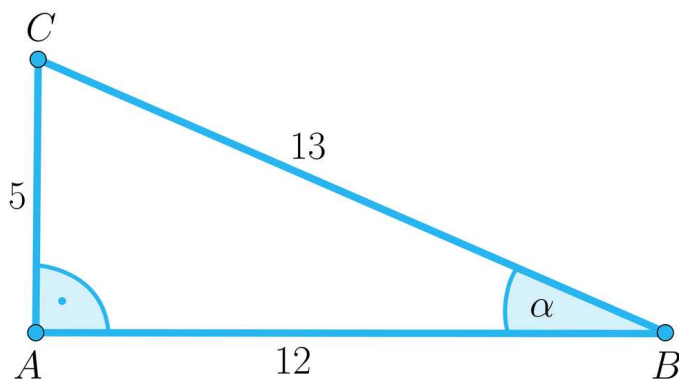
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku zaznaczono kąt α .



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Prawdą jest, że:

☐ $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{5}{13}$

☐ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -2,4$

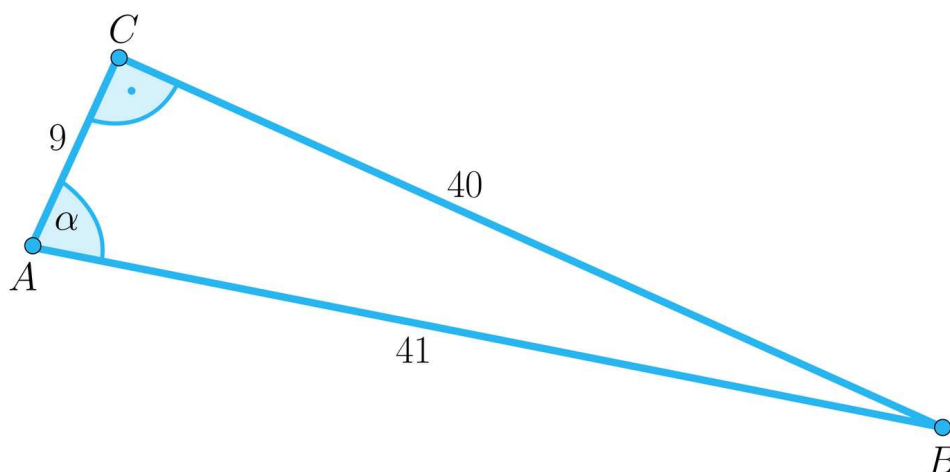
☐ $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{12}{13}$

☐ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{13}$

Ćwiczenie 2



Na rysunku zaznaczono kąt α .



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Nieprawdą jest, że:

☐ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{40}{41}$

☐ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{9}{40}$

☐ $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{40}{9}$

☐ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{9}{41}$

Ćwiczenie 3



Przeciągnij w wyznaczone miejsca taką liczbę, aby równość była prawdziwa.

O kącie ostrym α wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \boxed{}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \boxed{}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \boxed{}$$

1

-1

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ćwiczenie 4



Wiadomo, że $\sin \alpha = 0,6$ oraz $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Wartość wyrażenia $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ wynosi:

☐ -1

☐ $\frac{6}{10}$

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 5



Dla kątów $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ i $\beta = \frac{10\pi}{6}$ prawdą jest, że:

☐ $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1,5$

☐ $\sin \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$

☐ $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

☐ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ćwiczenie 6



Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{4}{5}$. Wartość wyrażenia $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$ to:

☐ $-\frac{11}{15}$

☐ $-\frac{29}{15}$

☐ $\frac{29}{15}$

☐ $\frac{11}{15}$

Ćwiczenie 7



Dopasuj wyrażenie do odpowiadającej mu wartości liczbowej.

$$\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{19\pi}{6}$$

$$-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{19\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$-1$$

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 8



Wyrażenie $(1 + \cos(\frac{7\pi}{5})) \cdot (1 - \cos(\frac{3\pi}{5}))$ można zapisać jako:

☐ $\sin^2(\frac{8\pi}{5})$

☐ $\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{8\pi}{5})}$

☐ $\operatorname{tg}(\frac{8\pi}{5})$

☐ $\cos^2(\frac{8\pi}{5})$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów redukcyjnych $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy:

VII. Trygonometria.

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych 30° , 45° , 60° ;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony:

VII. Trygonometria.

Uczeń:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową na stopniową i odwrotnie;

4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się wzorami redukcyjnymi dla kątów $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$
- stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- wykorzystuje poznane definicje i wzory w rozwiązywaniu zadań
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- rzutnik multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapisują poznane wzory redukcyjne na tablicy – mogą wykorzystać tabelę zawartą w sekcji „Przeczytaj”.

2. Uczniowie przypominają znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach – mogą wykorzystać tabelę zawartą w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
4. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
5. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
6. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Czy ten sinus ma plus czy minus? Znaki funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować materiały zawarte w animacji jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.