



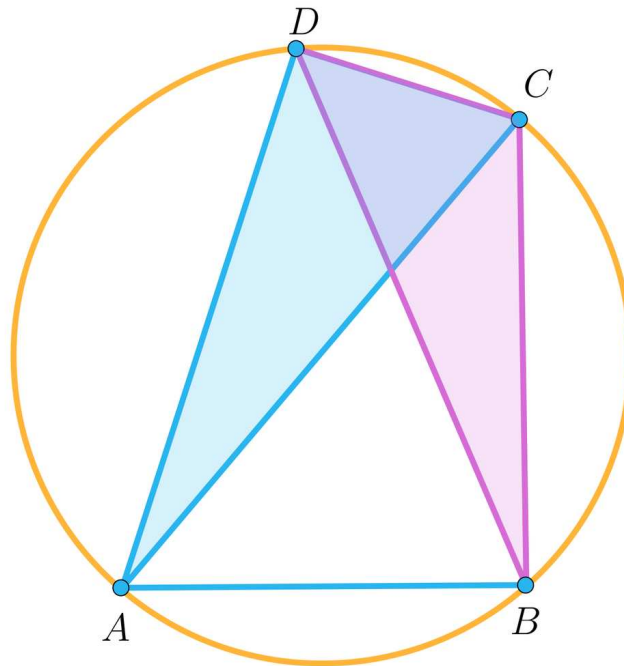
Okrąg opisany na czworokącie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



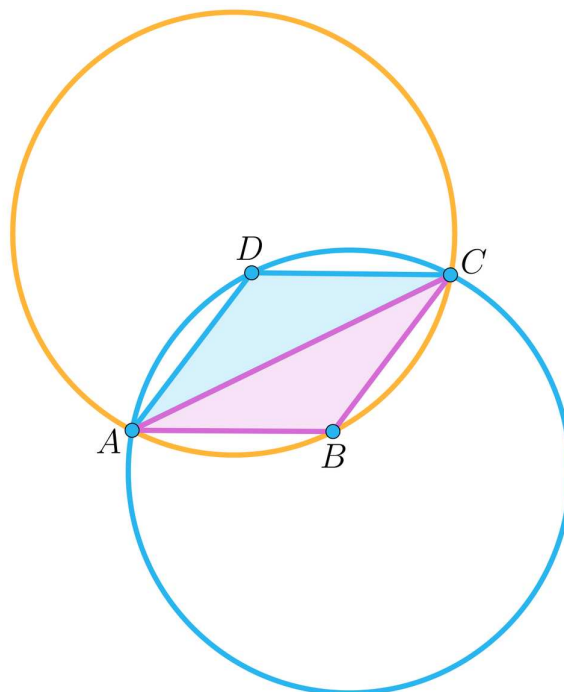
Wielokąty cykliczne

Powszechnie znany jest fakt, iż na każdym trójkącie można opisać okrąg i okrąg ten jest wyznaczony jednoznacznie. Inaczej sytuacja wygląda w przypadku wielokątów o większej niż 3 liczbie boków. Zauważmy na poniższym rysunku, że okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest tym samym okręgiem, który jest opisany na każdym z trójkątów, którego trzy wierzchołki są różnymi elementami zbioru $\{A, B, C, D\}$. Na poniższym rysunku zaznaczono trójkąty ACD i BCD , które są wpisane w okrąg opisany na czworokącie $ABCD$.



Czworokąt i trójkąty wpisane w okrąg

Dlatego też nie jest możliwe opisanie okręgu na rombie, który nie jest kwadratem, bo jak widać na poniższym rysunku, okręgi opisane na trójkątach ACD i ABC mają różne położenie na płaszczyźnie, choć oczywiście ich promienie są takie same.



Romb, na którym nie da się opisać okręgu

O wielokątach wypukłych, na których można opisać okrąg mówimy, że są one cykliczne. Niniejsza lekcja ma za zadanie podać warunek konieczny i wystarczający, by na czworokącie dało się opisać okrąg.

Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenie podające warunki opisywalności okręgu na czworokącie wypukłym.
- Zastosujesz twierdzenie Ptolemeusza i Carnot'a w zadaniach dotyczących okręgu opisanego na czworokącie.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Definicja: Wielokąt cykliczny

Będziemy mówić, że n -kąt wypukły jest wielokątem cyklicznym, jeżeli da się na nim opisać okrąg.

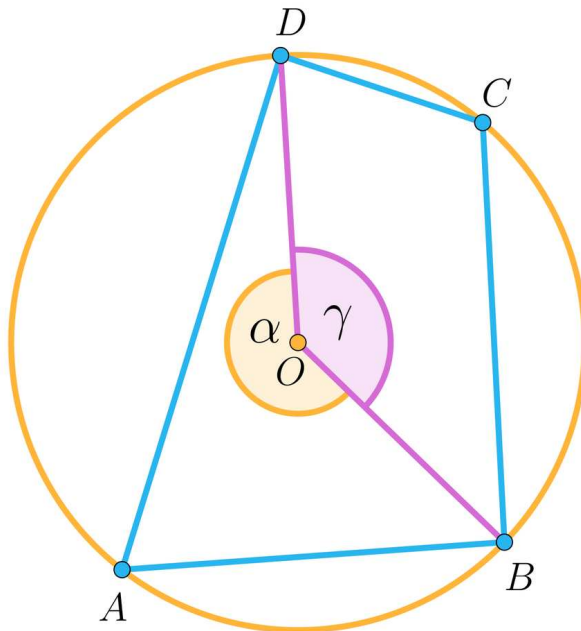
Istnieje proste kryterium opisywalności okręgu na czworokącie, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: O czworokącie cyklicznym

Czworokąt wypukły jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar przeciwległych kątów jest równa 180° .

Dowód

Najpierw zajmiemy się warunkiem koniecznym. Przypuśćmy zatem, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O . Poprowadźmy promienie OD i OB , jak na rysunku.



Dowód twierdzenia o czworokącie cyklicznym

Pokażemy, że suma miar kątów BAD i BCD jest równa 180° .

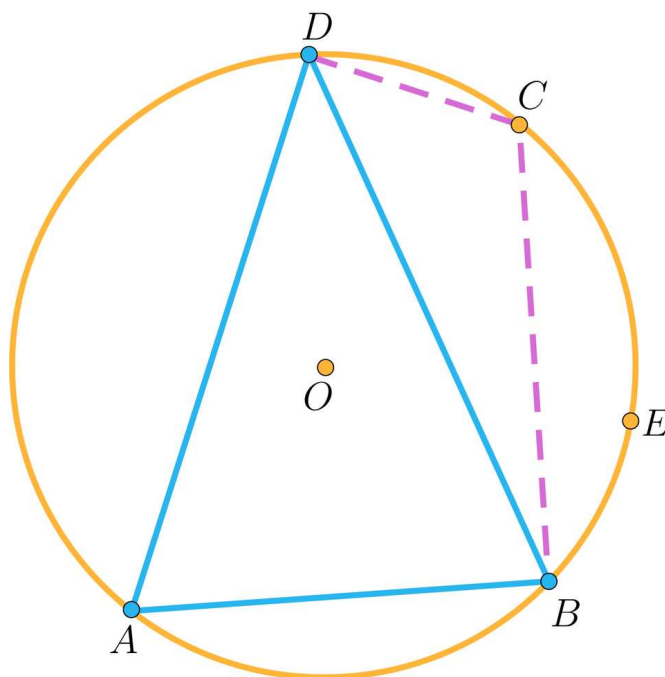
Zauważmy, że kąt BAD jest kątem wpisanym opartym na tym spośród łuków o końcach BD , do którego należy punkt C . Tym samym jego miara jest połową miary kąta środkowego α opartego na tym samym łuku. Podobnie kąt BCD jest kątem wpisanym

opartym na tym spośród łuków o końcach BD , do którego należy punkt A . Tym samym jego miara jest połową miary kąta środkowego α opartego na tym samym łuku.

Ale $\alpha + \gamma = 360^\circ$, stąd $|\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego jest równa 360° , zatem również suma miar kątów ABC i ADC jest równa 180° .

Teraz zajmiemy się warunkiem dostatecznym. Przypuśćmy zatem, że w czworokącie $ABCD$ mamy $|\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ$ i rozważmy okrąg o środku O opisany na trójkącie ABD . Rozważmy dowolny punkt E leżący na łuku o końcach B, D w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi BD , co punkt C , jak na rysunku.



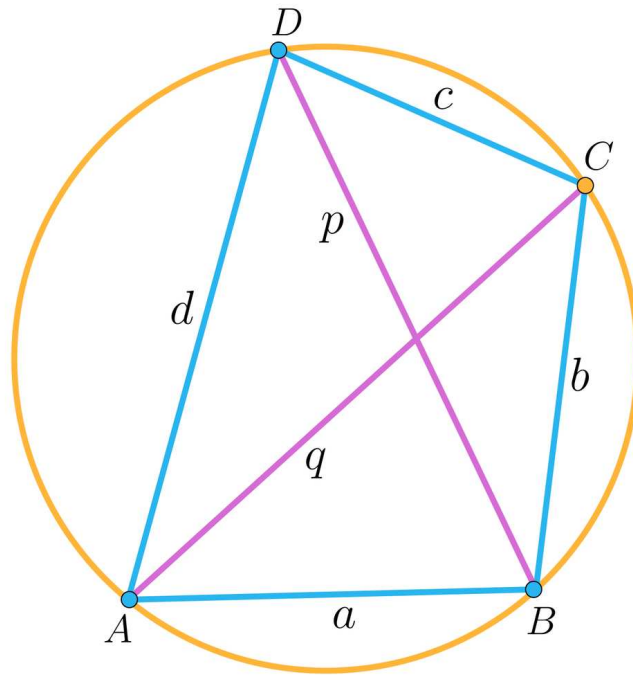
Dowód twierdzenia o czworokącie cyklicznym

Z udowodnionego już warunku koniecznego wiemy, że $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BED| = 180^\circ$.

Co oznacza, że $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle BCD| = 180^\circ - |\sphericalangle BAD|$.

Ale wiemy również, że miejscem geometrycznym punktów, z których odcinek BD widać pod tym samym kątem jest łuk okręgu (o czym była mowa w lekcji o zależnościach między kątami w kole). Tym samym punkt C leży na łuku tego samego okręgu co punkt E .

Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadań związanych z [czworokątami cyklicznymi](#), przywołamy klasyczną wersję twierdzenia Ptolemeusza. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Twierdzenie Ptolemeusza

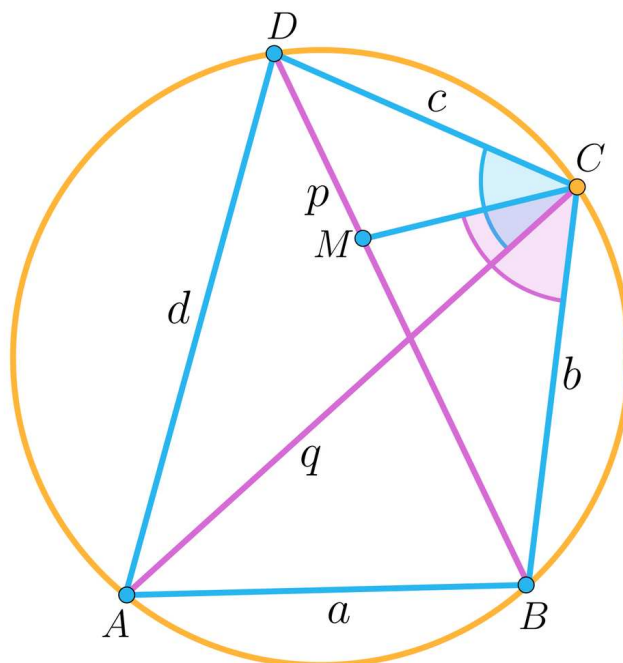
Twierdzenie: Ptolemeusza

W dowolnym czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości jego przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków.

Przy oznaczeniach z powyższego rysunku twierdzenie orzeka, że $pq = ac + bd$.

Dowód

Rozważmy taki punkt M leżący na przekątnej BD , że $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle MCB|$.



Dowód twierdzenia Ptolemeusza

Zauważmy, że kąty CBD i CAD mają równe miary, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku.

Tym samym trójkąty ACD i BCM , na mocy cechy kkk , są podobne.

W szczególności mamy więc, że $\frac{|MB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$. Stąd $|MB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |BC|$.

Analogicznie podobne są także trójkąty CDM i ABC . Stąd $\frac{|DM|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|}$, czyli $|DM| \cdot |AC| = |AB| \cdot |DC|$.

Otrzymujemy więc układ równań $\begin{cases} |MB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |BC| \\ |DM| \cdot |AC| = |AB| \cdot |DC| \end{cases}$, który przy oznaczeniach z rysunku przyjmuje prostszą postać: $\begin{cases} |MB| \cdot q = d \cdot b \\ |DM| \cdot q = a \cdot c \end{cases}$

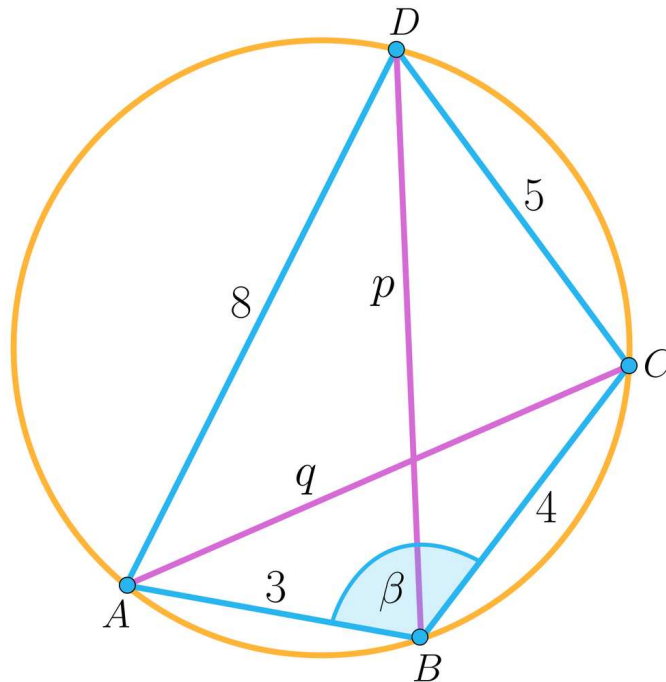
Dodając stronami równania tego układu i wyłączając wspólny czynnik otrzymujemy: $q \cdot (|MB| + |DM|) = d \cdot b + a \cdot c$, co kończy dowód twierdzenia.

Pozostaje dodać, że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, a w dowolnym czworokącie wypukłym zachodzi nierówność $pq \leq ac + bd$, zwana także [nierównością Ptolemeusza](#).

Przykład 1

Rozważmy czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg w którym dane są: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|AD| = 8$. Wyznamy długości jego przekątnych.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ czworokąt jest cykliczny, to $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - \beta$. Zatem $\cos(\sphericalangle ADC) = -\cos \beta$.

Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i ADC otrzymujemy:

$$q^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \beta,$$

$$q^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \beta.$$

Z pierwszego z równań otrzymujemy, że $\cos \beta = \frac{25 - q^2}{24}$, zatem

$$q^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{25 - q^2}{24}. \text{ Stąd } q = \sqrt{\frac{517}{13}}.$$

Wyznaczając długość przekątnej BD możemy powtórzyć powyższy schemat.

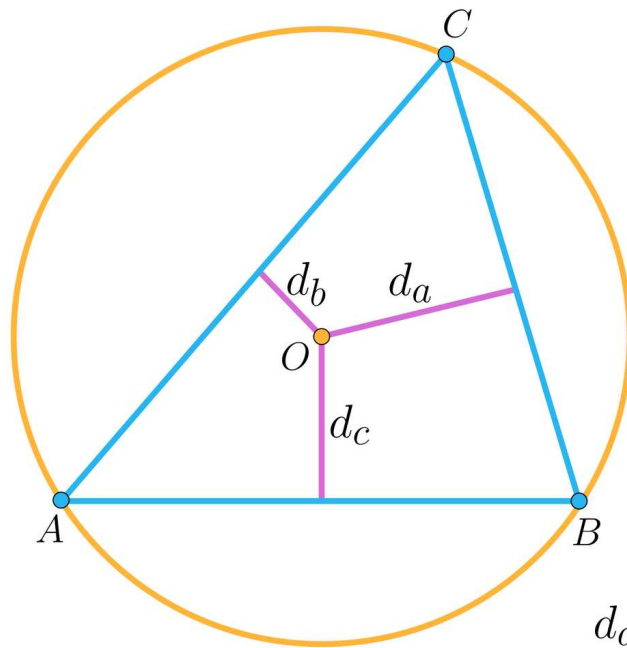
Ale możemy też skorzystać z twierdzenia Ptolemeusza.

$$\text{Otrzymujemy wtedy, że } p\sqrt{\frac{517}{13}} = 4 \cdot 8 + 3 \cdot 5. \text{ Zatem } p = \frac{47\sqrt{13}}{\sqrt{517}}.$$

Na koniec przywołamy twierdzenie Carnot'a, które bezpośrednio nie dotyczy czworokątów, ale w którego dowodzie warto skorzystać z udowodnionego wcześniej twierdzenia Ptolemeusza. Jakkolwiek dowód tego twierdzenia tutaj pominiemy, to jego istotna część jest przedmiotem jednego z ćwiczeń dołączonych do lekcji.

Twierdzenie: Carnot'a

Suma odległości środka okręgu opisanego na trójkącie od jego trzech boków jest równa sumie długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt.



$$d_a + d_b + d_c = R + r$$

Twierdzenie Carnot'a

Słownik

wielokąt cykliczny

wielokątem cyklicznym nazywamy wielokąt wypukły, który da się wpisać w okrąg

nierówność Ptolemeusza

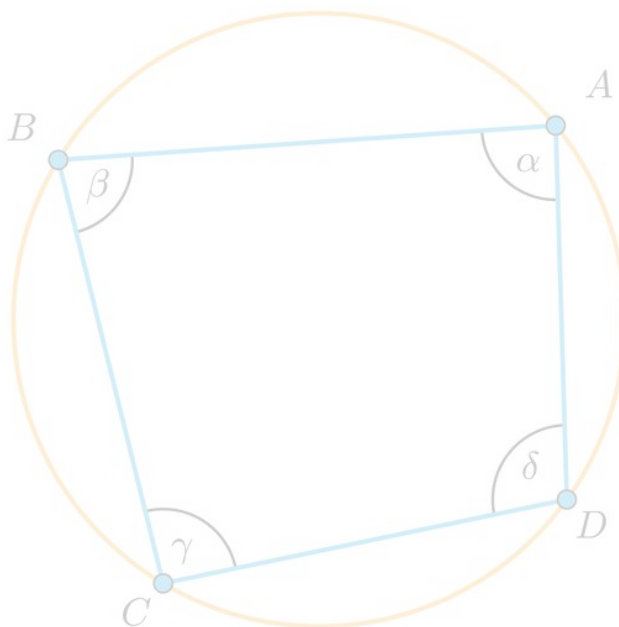
w dowolnym czworokącie iloczyn długości jego przekątnych jest nie większy niż suma iloczynów długości przeciwległych boków (równość zachodzi tylko dla czworokąta cyklicznego)

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Ustal położenie wierzchołków czworokąta tak, aby otrzymany wielokąt był wypukły, a następnie wybierz polecenie „Czworokąt wpisany w okrąg”. Odczytaj miary kątów wewnętrznych czworokąta. Sformułuj hipotezę dotyczącą zależności między tymi miarami. Zmieniaj położenie wybranych wierzchołków i sprawdź, czy postawiona hipoteza zachodzi dla różnych miar kątów wewnętrznych czworokąta.

Następnie wybierz polecenie „Twierdzenie Ptolemeusza”. Ustal położenie wierzchołków czworokąta wypukłego. Odczytaj długości boków i przekątnych tego czworokąta. Wyznacz iloczyn długości przekątnych i sumę iloczynów długości przeciwległych boków. Sformułuj hipotezę dotyczącą zależności między tymi wielkościami. Zmieniaj położenie wybranych wierzchołków i sprawdź, czy postawiona hipoteza zachodzi dla różnych położen wierzchołków czworokąta.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DiGDggbCZ>




Polecenie 2

Miary trzech kolejnych kątów wewnętrznych czworokąta wpisanego w okrąg mają się do siebie tak, jak $2 : 3 : 4$. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

Polecenie 3

W deltoidzie o bokach długości 4 i 7 dokładnie dwa spośród jego kątów wewnętrznych są proste. Oblicz iloczyn długości przekątnych tego deltoidu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

W czworokącie cyklicznym $ABCD$ boki mają długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 8$, $|AD| = 6$. Wyznacz długości p, q przekątnych tego czworokąta, jeśli $p - q = 1$.

Ćwiczenie 2

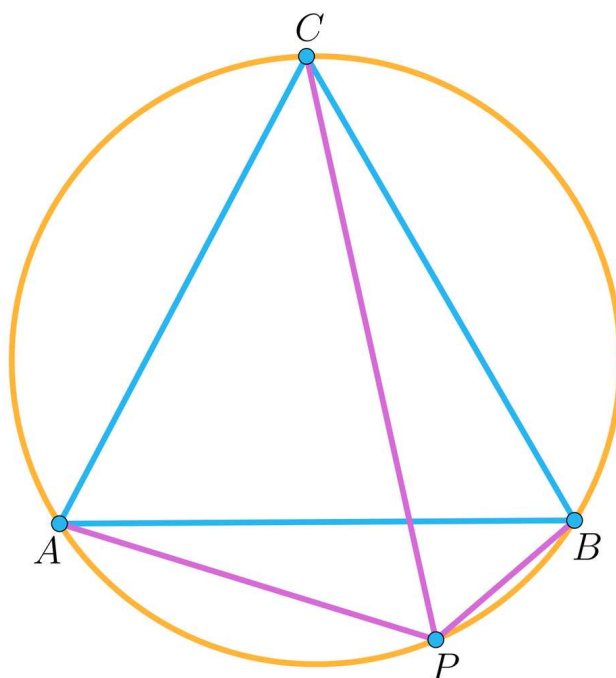
W okrąg wpisano trapez $ABCD$ o podstawach AB, CD i wysokości 4. Ramię BC tego trapezu jest nachylone do dłuższej podstawy AB pod kątem $\beta = 45^\circ$, a jego długość jest równa krótszej podstawie tego trapezu. Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Dany jest okrąg opisany na trójkącie równobocznym ABC . Na tym okręgu wybrano punkt P , różny od wierzchołków danego trójkąta, jak na rysunku.



Uzasadnij, że $|CP| = |AP| + |BP|$.

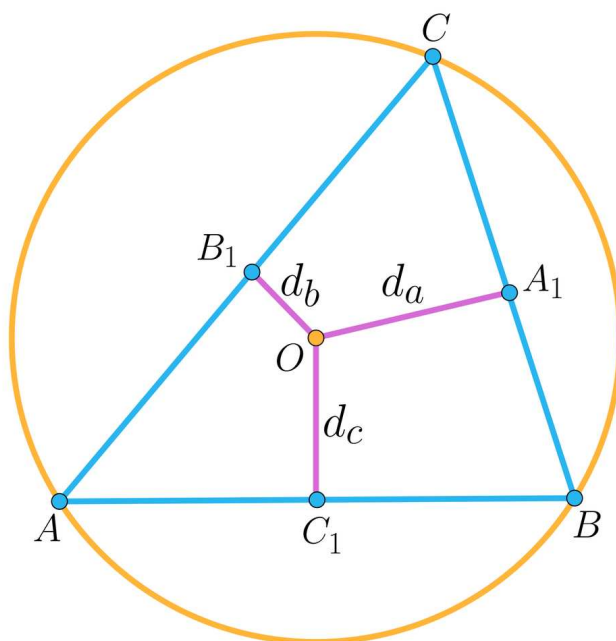
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Punkt O niech będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Niech d_a, d_b, d_c oznaczają odpowiednio odległości punktu O od boków $a = BC, b = AC, c = AB$ tego trójkąta, jak na rysunku.



Prowadząc analogiczne rozumowania dla pozostałych par odcinków i sumując otrzymane równości otrzymalibyśmy, po niezbędnych przekształceniach, dowód twierdzenia Carnot'a.

Ćwiczenie 7



Uzasadnij, że każdy trapez wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym.

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg opisany na czworokącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie wielokąta wpisanego w okrąg
- stosuje twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg
- stosuje twierdzenie Ptolemeusza
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie wiadomości związanych z okręgiem opisanym na trójkącie – tak kieruje dyskusją, by pojawiła się teza, że taki okrąg istnieje dla każdego trójkąta. Następnie formułuje problem dotyczący okręgu opisanego na czworokącie. Prosi o podanie przykładów czworokątów, które można lub których nie można wpisać w okrąg. Zwraca uwagę na związek między cyklicznością czworokąta i trójkątów, których wierzchołkami są wierzchołki czworokąta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wprowadza pojęcie wielokąta cyklicznego. Następnie poleca uruchomić symulację interaktywną i wykonać zamieszczone w niej polecenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg (cyklicznym). Prezentuje przygotowany wcześniej rysunek czworokąta cyklicznego i dorysowuje promienie, których końcami są dwa przeciwległe wierzchołki. Następnie prosi uczniów o przeprowadzenie dowodu warunku koniecznego. Pod kierunkiem nauczyciela jeden z uczniów przeprowadza dowód na tablicy. Następnie nauczyciel przeprowadza dowód warunku dostatecznego.
3. Nauczyciel prezentuje rysunek czworokąta cyklicznego z dorysowanymi przekątnymi i formułuje twierdzenie Ptolemeusza. Następnie inicjuje dowód, poprzez dorysowanie takiego punktu leżącego na jednej z przekątnych, dla którego zachodzi równość odpowiednich kątów. Następnie formułuje tezę o podobieństwie odpowiednich trójkątów i prosi uczniów o ich uzasadnienie i sformułowanie odpowiednich proporcji odcinkowych, prowadzących do dowodu twierdzenia. Wybrany uczeń lub nauczyciel kończą dowód. Nauczyciel wskazuje, że podane twierdzenie stanowi warunek konieczny i wystarczający cykliczności czworokąta oraz podaje nierówność Ptolemeusza.

4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie. Uczniowie rozwiązują problem w parach i wybrani uczniowie przedstawiają na forum klasy efekty pracy. Nauczyciel formułuje twierdzenie Carnot'a.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do przeprowadzenia pełnego dowodu twierdzenia Carnot'a.

Materiały pomocnicze:

[Przekątne w wielokątach](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można ją też wykorzystać przy realizacji tematu o własnościach czworokątów wpisanych w okrąg.