



Rozwiązywanie trudniejszych nierówności liniowych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązywanie trudniejszych nierówności liniowych

Źródło: Artem Beliaikin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale wykorzystamy poznane wcześniej metody rozwiązywania nierówności zawierających mianownik, nawiasy lub wzory skróconego mnożenia. Skoncentrujemy się na trudniejszych nierównościach, których przekształcanie może nie być na początku oczywiste.

Twoje cele

- Rozwiążesz trudniejsze nierówności metodą nierówności równoważnych.
- Dopiszesz do nierówności liczbę lub wyrażenie algebraiczne tak, aby nierówność spełniała określony warunek.

Przeczytaj

Przykład 1

Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność

$$(2 - x)^2 - (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) - 5x^2 > -3(-x - 1)^2.$$

Najpierw rozwiążemy powyższą nierówność, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy. Zauważmy, że wyrażenie $(-1 - x)^2$ jest równoważne wyrażeniu $(1 + x)^2$. Zapiszmy zatem równanie w nowej postaci.

$$4 - 4x + x^2 - (2 - x^2) - 5x^2 > -3(x^2 + 2x + 1)$$

Pozbywamy się nawiasów.

$$4 - 4x + x^2 - 2 + x^2 - 5x^2 > -3x^2 - 6x - 3$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-3x^2 - 4x + 2 > -3x^2 - 6x - 3$$

Ponownie redukujemy wyrazy podobne.

$$-3x^2 - 4x + 2 > -3x^2 - 6x - 3$$

$$-4x + 2 > -6x - 3$$

$$-4x + 6x > -3 - 2$$

$$2x > -5$$

$$x > -\frac{5}{2}$$

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $(-2\frac{1}{2}, \infty)$, więc nierówność spełnia każda liczba naturalna.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $(x - 3)^3 + 2x(x + 1) > x^3 - 7x^2$.

Najpierw zastosujemy wzór na [sześcián różnicy dwóch wyrażeń](#).

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 2x^2 + 2x > x^3 - 7x^2$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 2x^2 + 2x > x^3 - 7x^2$$

$$-9x^2 + 27x - 27 + 2x^2 + 2x > -7x^2$$

$$-9x^2 + 27x - 27 + 2x^2 + 2x > -7x^2$$

$$-7x^2 + 29x - 27 > -7x^2$$

Ponownie redukujemy wyrazy podobne.

$$-7x^2 + 29x - 27 > -7x^2$$

$$29x - 27 > 0$$

Przenosimy wiadomą na prawą stronę nierówności.

$$29x > 27$$

Dzielimy obie strony nierówności przez 29.

$$29x > 27 \mid : 29$$

$$x > \frac{27}{29}$$

Przykład 3

Znajdź wszystkie pary kolejnych liczb naturalnych nieparzystych takich, że różnica kwadratu mniejszej z tych liczb i kwadratu większej z tych liczb jest nie mniejsza od liczby (-24) .

W tym przykładzie chcemy znaleźć pary kolejnych liczb nieparzystych, zatem liczb różniących się o dwa. Zapisujemy odpowiednią nierówność.

$$(2n + 1)^2 - (2n + 3)^2 \geq -24$$

W rozwiązaniu nierówności wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$$4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 12n + 9) \geq -24$$

$$4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 12n - 9 \geq -24$$

$$-8n - 8 \geq -24$$

$$-8n \geq -16$$

$$n \leq 2$$

Zatem liczba $n \in \{0, 1, 2\}$. Otrzymaliśmy trzy pary liczb spełniających warunki zadania.

Są to: 1 i 3, 3 i 5, 5 i 7.

Przykład 4

Wykaż, że każda liczba nie mniejsza od $\frac{-3(4+2\sqrt{2})}{8}$ spełnia nierówność

$$2(x+1)^2 - \frac{(x-\sqrt{6})(\sqrt{6}+x)}{3} \geq 3 - (x-\sqrt{2})^2 + 2\frac{2}{3}x^2.$$

Najpierw zastosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń $(a+b)^2$, następnie wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń $a^2 - b^2$ oraz wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń $(a-b)^2$.

$$2(x+1)^2 - \frac{(x-\sqrt{6})(\sqrt{6}+x)}{3} \geq 3 - (x-\sqrt{2})^2 + 2\frac{2}{3}x^2$$

$$2(x^2 + 2x + 1) - \frac{x^2-6}{3} \geq 3 - (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + 2\frac{2}{3}x^2$$

Pozbywamy się nawiasów.

$$2x^2 + 4x + 2 - \frac{x^2-6}{3} \geq 3 - x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 + 2\frac{2}{3}x^2$$

$$2x^2 + 4x + 2 - \frac{1}{3}x^2 + 2 \geq 3 - x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 + 2\frac{2}{3}x^2$$

Obliczamy sumy wyrazów podobnych.

$$1\frac{2}{3}x^2 + 4x + 4 \geq 1\frac{2}{3}x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$$

Redukujemy te same wyrazy występujące po obu stronach nierówności.

$$1\frac{2}{3}x^2 + 4x + 4 \geq 1\frac{2}{3}x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$$

$$4x + 4 \geq 2\sqrt{2}x + 1$$

Przenosimy wyrazy z niewiadomymi na lewą stronę, a liczby na prawą stronę nierówności.

$$4x - 2\sqrt{2}x \geq 1 - 4$$

$$4x - 2\sqrt{2}x \geq -3$$

Wyłączamy x poza nawias.

$$(4 - 2\sqrt{2})x \geq -3$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $4 - 2\sqrt{2}$.

$$(4 - 2\sqrt{2})x \geq -3 \quad | : (4 - 2\sqrt{2})$$

$$x \geq \frac{-3}{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usuwamy nierówność z mianownika, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez $4 + 2\sqrt{2}$.

$$x \geq \frac{-3(4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})}$$

$$x \geq \frac{-3(4 + 2\sqrt{2})}{8}$$

Wykazaliśmy, że każda liczba nie mniejsza od $\frac{-3(4 + 2\sqrt{2})}{8}$ spełnia nierówność.

Słownik

sześcian różnicy dwóch wyrażeń a i b

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Spróbuj samodzielnie rozwiązać podane przykłady. Sprawdź poprawność Twoich rozwiązań z rozwiązaniami przedstawionymi w filmie. Czy podane wskazówki okazały się przydatne?

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D802h3rdo>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący rozwiązywania nierówności.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność $3(x - \sqrt{2})^2 - \frac{(1-x)(1+x)}{2} < 3\frac{1}{2}x^2$.

Polecenie 3

Rozwiąż nierówność $(2x - 3)^3 + 12x^2 < (2x + 3)^3 - 12x^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest nierówność $(x - 1)^3 - 3x^2 > (x + 1)^3 + 3x^2$. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

Dla $x = \sqrt[3]{2}$ nierówność jest prawdziwa.

Nierówność jest sprzeczna dla dowolnej liczby ujemnej.

Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in (-\infty, 4)$.

Dla $x = -2$ nierówność jest sprzeczna.

Dla $x = \sqrt[3]{27}$ nierówność jest fałszywa.

Ćwiczenie 2



Wskaż nierówność, która nie jest równoważna pozostałym nierównościom.

$(x - 1)^3 > 0$

$\sqrt{2}x - \sqrt{2} > 0$

$(x - 2)^3 > 1$

$x^3 > 1$

Ćwiczenie 3



Wybierz i wstaw w wolne miejsce taką liczbę lub wyrażenie algebraiczne, aby nierówność:

$$(x - 3)^3 - 2x < x^3 + 25x + \boxed{}$$

była tożsamościowa.

 27 $-9x^2 + 3$ 30 $-9x^2 - 30$

Ćwiczenie 4



Zaznacz, która liczba spełnia nierówność $(x + 1)^2 + (x - 1)^3 + 3x^2 \geq (x - 1)^2 + x^3$.
Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

 0 $(-2)^0$ $3\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $-2\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary nierówności równoważne.

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) > x + x^3$$

$$x < -10$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3x > 1 + x^3$$

$$x < 1$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x > 2 + x^3$$

$$3x > -7$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) > 2x + x^3$$

$$2x < -1$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż nierówność $9x^2 \leq (x + 3)^3 - (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, a następnie przeciągnij w odpowiednie miejsca prawidłowe liczby.

Ile liczb spośród wymienionych: $-\sqrt{2}$, -2 , -5^{-3} , $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ **nie** należy do zbioru rozwiązań nierówności?

Odpowiedź:

Jaka jest najmniejsza liczba całkowita ujemna, która należy do zbioru rozwiązań nierówności?

Odpowiedź:

Jaka jest największa liczba całkowita ujemna, która należy do zbioru rozwiązań nierówności?

Odpowiedź:

Ćwiczenie 7



Posortuj rozwiązanie nierówności w odpowiedniej kolejności.

$$8x^3 + 7x^2 + 6x - 10 \geq 8x^3 + 7x^2 + 12x + 8$$



$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 9 + 4x^2 + 15x^2 \geq 8 + 12x + 6x^2 + x^3 + 7x^3 + x^2$$



$$-6x \geq 18$$



$$(2x - 1)^3 - (3 - 2x)(3 + 2x) + 15x^2 \geq (2 + x)^3 + x^2(7x + 1)$$



$$6x - 12x \geq 8 + 10$$



$$x \leq -3$$



$$6x - 10 \geq 12x + 8$$



Ćwiczenie 8



Wpisz prawidłową odpowiedź. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych (od kwadratu liczby mniejszej odejmujemy kwadrat liczby większej) jest większa od liczby (-12) .

Ile jest par takich liczb?

Odpowiedź:

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie trudniejszych nierówności liniowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje trudniejsze nierówności metodą nierówności równoważnych
- dopisuje do nierówności liczbę lub wyrażenie algebraiczne, aby nierówność spełniała określony warunek
- przeprowadza rozumowania związane z analizą nierówności liniowych, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja

- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z przykładami zadań umieszczonymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie oglądają film samouczek. Następnie wspólnie, pod kierunkiem nauczyciela analizują rozwiązania przykładów. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości i odpowiada na konkretne pytania uczniów.
2. Uczniowie w grupach 4 osobowych rozwiązują ćwiczenia, uczestnicząc w konkursie zadaniowym.
3. Grupa, która pierwsza poprawnie rozwiąże zadania otrzymuje ocenę bardzo dobry.
4. Uczniowie wspólnie omawiają odpowiedzi i ewentualne problemy związane z rozwiązaniami.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania nierówności, które pojawiły się w ćwiczeniach interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań umieszczonych w poleceniach pod filmem samouczkiem.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność liniowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania własnej prezentacji multimedialnej pokazującej rozwiązywanie nierówności zawierających wzory skróconego mnożenia.