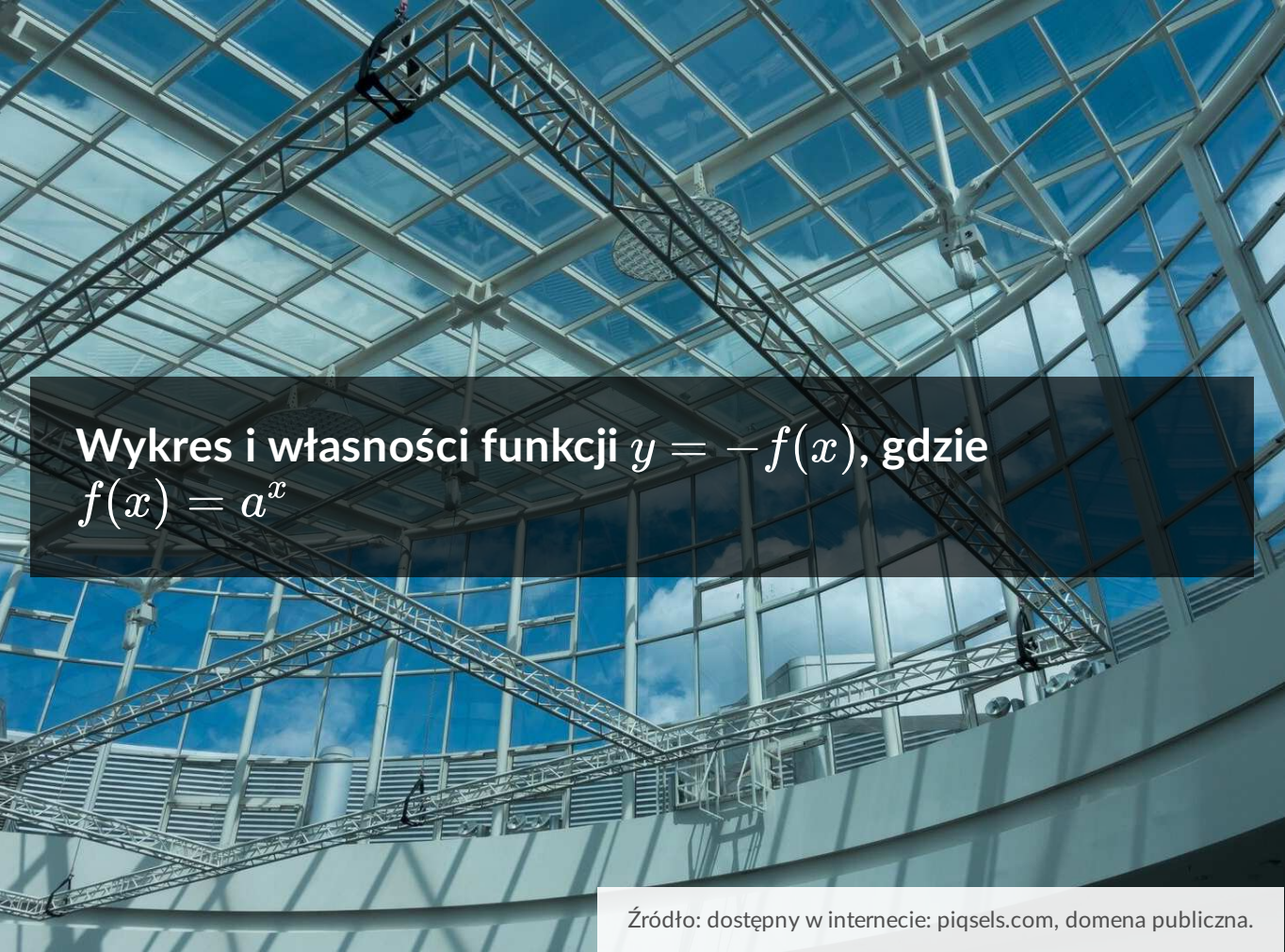




Wykres i własności funkcji $y = -f(x)$, gdzie $f(x) = a^x$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji $y = -f(x)$, gdzie $f(x) = a^x$

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Funkcja wykładnicza służy do opisu wielu zjawisk i wielkości, które otaczają nas w życiu codziennym. Przekształcenie wykresu tej funkcji względem osi odciętych w układzie współrzędnych powoduje, że mogą zmienić się jej niektóre własności. W trakcie lekcji omówimy, jak zmieni się wykres oraz własności funkcji wykładniczej po przekształceniu w symetrii względem osi X układu współrzędnych.

Twoje cele

- Wymienisz własności funkcji wykładniczej na podstawie wykresu.
- Naszkicujesz wykres i odkryjesz własności funkcji wykładniczej w symetrii względem osi odciętych układu współrzędnych.
- Wykorzystasz poznane własności do rozwiązywania zadań.

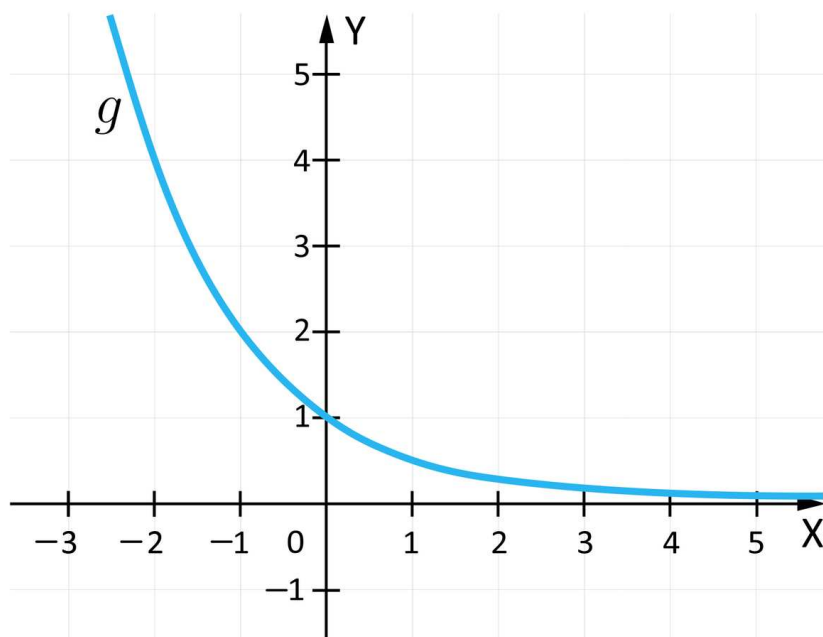
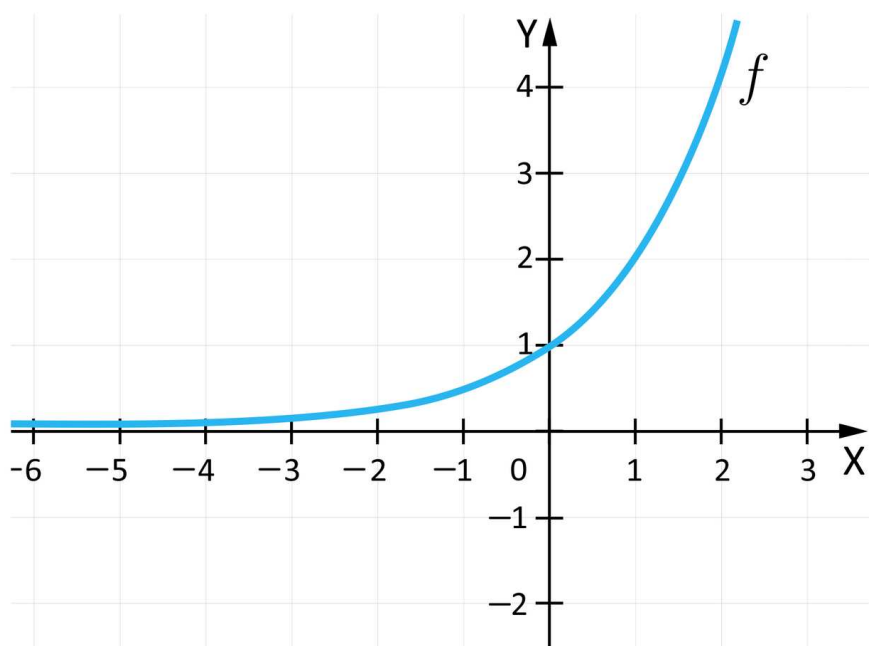
Przeczytaj

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza**.

W materiale omówimy wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = -a^x$ oraz ich własności.

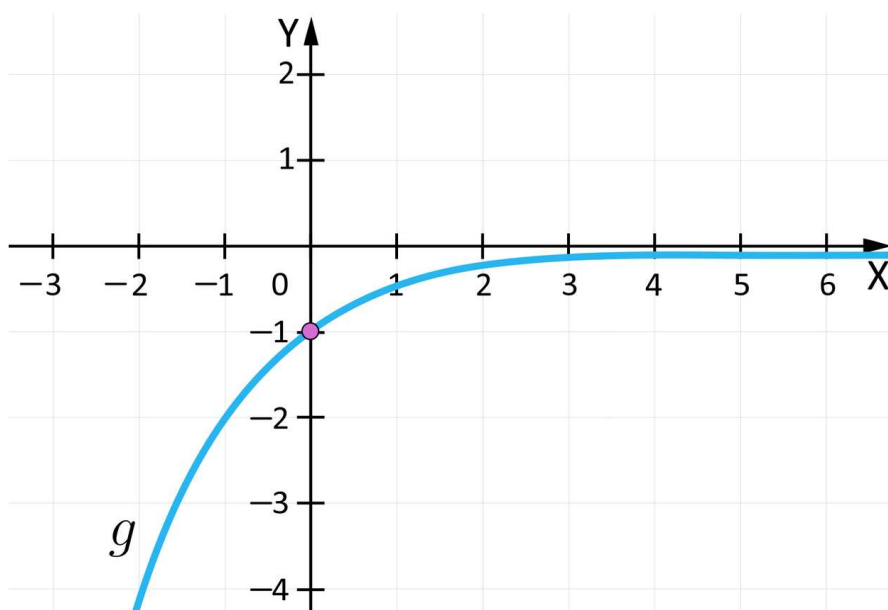
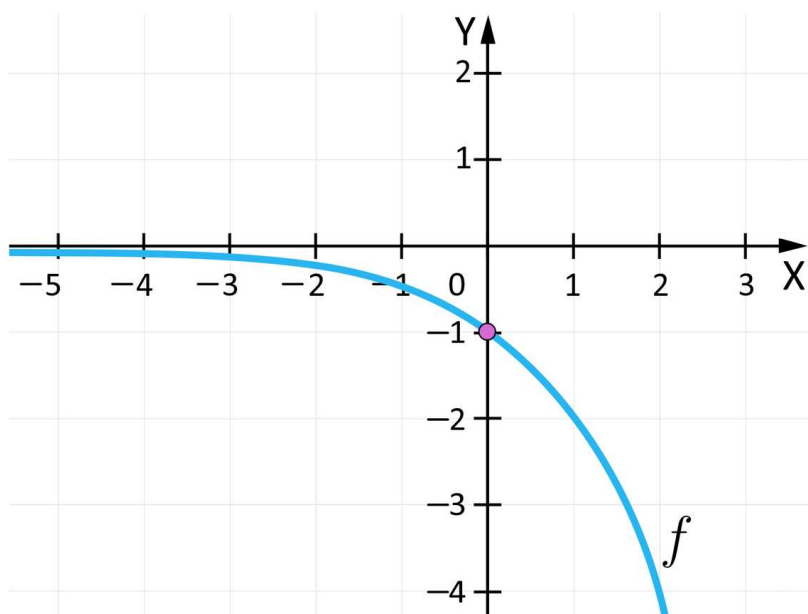
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji zadanych wzorami $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Korzystając z wykresów funkcji $f(x) = a^x$ możemy odczytać następujące własności:

- dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości zbiór $\mathbb{R}_+$,
- wykres **funkcji wykładniczej** $f(x) = a^x$ zawsze przechodzi przez punkt $(0, 1)$, bo $a^0 = 1$,
- funkcja jest malejąca dla $a \in (0, 1)$ oraz rosnąca dla $a \in (1, \infty)$,
- funkcja nie ma miejsc zerowych,
- dla dwóch dowolnych argumentów funkcja przyjmuje różne wartości, zatem jest różnowartościowa.

Naszukujemy wykresy funkcji określonych wzorami $f(x) = -2^x$ oraz $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Korzystając z wykresów funkcji $f(x) = -a^x$ możemy odczytać następujące własności:

- dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości zbiór $\mathbb{R}_-$,
- wykres funkcji wykładniczej $f(x) = -a^x$ zawsze przechodzi przez punkt $(0, -1)$, bo $-a^0 = -1$
- funkcja jest rosnąca dla $a \in (0, 1)$ oraz malejąca dla $a \in (1, \infty)$,
- funkcja nie ma miejsc zerowych,
- dla dwóch dowolnych argumentów funkcja przyjmuje różne wartości, zatem jest różnowartościowa.

Własność: odbicie symetryczne wykresu funkcji wykładniczej

Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = -a^x$ są symetryczne względem osi X układu współrzędnych.

Własności funkcji wykładniczych zadanych wzorami $f(x) = a^x$ oraz $f(x) = -a^x$:

- mają tę samą dziedzinę, ale różne zbiory wartości,
- wykres funkcji $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(0, 1)$, a wykres funkcji $f(x) = -a^x$ przechodzi przez punkt $(0, -1)$,
- dla $a \in (0, 1)$ funkcja $f(x) = a^x$ jest malejąca, zaś funkcja $f(x) = -a^x$ jest rosnąca,
- dla $a \in (1, \infty)$ funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca, zaś funkcja $f(x) = -a^x$ jest malejąca,
- funkcje nie mają miejsc zerowych,
- są różnowartościowe.

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji o wzorze $-f(x)$ w podanym przedziale, wystarczy wyznaczyć zbiór wartości dla funkcji określonej wzorem $f(x)$.

Przykład 1

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3^x$. Wyznamy zbiór wartości funkcji zadanej wzorem $g(x) = -f(x)$, jeżeli jej dziedziną jest zbiór $\langle -2, 1 \rangle$.

Ponieważ funkcja f jest funkcją wykładniczą i rosnącą, to funkcja g przyjmie wartość najmniejszą dla największego argumentu, a wartość największą dla najmniejszego argumentu.

Najpierw obliczymy te wartości dla funkcji $f(x)$.

Zatem mamy $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ oraz $f(1) = 3^1 = 3$.

Dla funkcji $g(x)$ wartości te wynoszą odpowiednio:

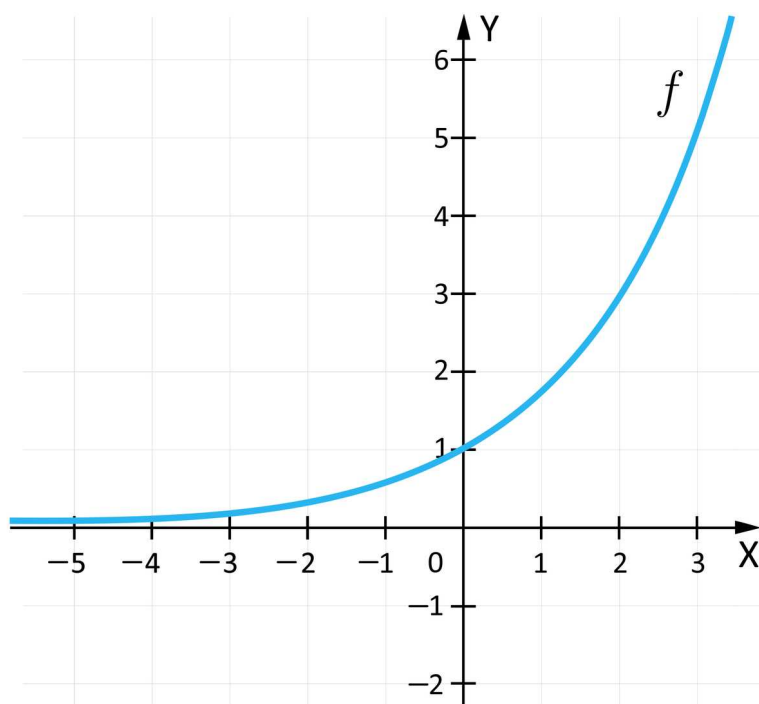
$g(-2) = -f(-2) = -\frac{1}{9}$ oraz $g(1) = -f(1) = -3$.

Zatem zbiorem wartości funkcji $g(x)$ jest zbiór $\langle -3, -\frac{1}{9} \rangle$.

Do wyznaczenia własności wykresu funkcji $-f(x)$, wystarczy znać własności wykresu funkcji $f(x)$. Pokażemy to na przykładzie rozwiązania nierówności, czy wyznaczenia wartości najmniejszej i największej w podanym przedziale.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = (\sqrt{3})^x$. Niech $g(x) = -f(x)$.



Dla zadanej funkcji wyznaczmy:

a) zbiór wartości funkcji g .

Ponieważ zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb $\mathbb{R}_+$, zatem zbiorem wartości funkcji g jest zbiór $\mathbb{R}_-$.

b) rozwiązanie nierówności $g(x) \leq -1$.

Ponieważ $f(x) \geq 1$ dla $x \in (0, \infty)$, zatem rozwiązaniem nierówności $g(x) \leq -1$ jest ten sam zbiór liczb.

c) wartość największą i najmniejszą w przedziale $\langle -1, 2 \rangle$.

Ponieważ funkcja f jest wykładnicza i rosnąca, zatem funkcja g jest malejąca, więc wartość najmniejszą przyjmie dla największego argumentu, a wartość największą dla najmniejszego argumentu.

$$g(-1) = -f(-1) = -\left(\sqrt{3}\right)^{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g(2) = -f(2) = -\left(\sqrt{3}\right)^2 = -3.$$

Zatem wartość najmniejsza wynosi -3 , a wartość największa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy istnieje taki argument, dla którego funkcje określone wzorami $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = -a^x$ przyjmują taką samą wartość.

W tym celu rozwiążemy równanie $f(x) = g(x)$.

Mamy $a^x = -a^x$.

Równanie możemy sprowadzić do postaci $2a^x = 0$, czyli $a^x = 0$, co jest niemożliwe, bo funkcja wykładnicza postaci $f(x) = a^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Zatem nie istnieje taki argument, dla którego podane funkcje przyjmują taką samą wartość.

Słownik

funkcja wykładnicza

funkcja postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

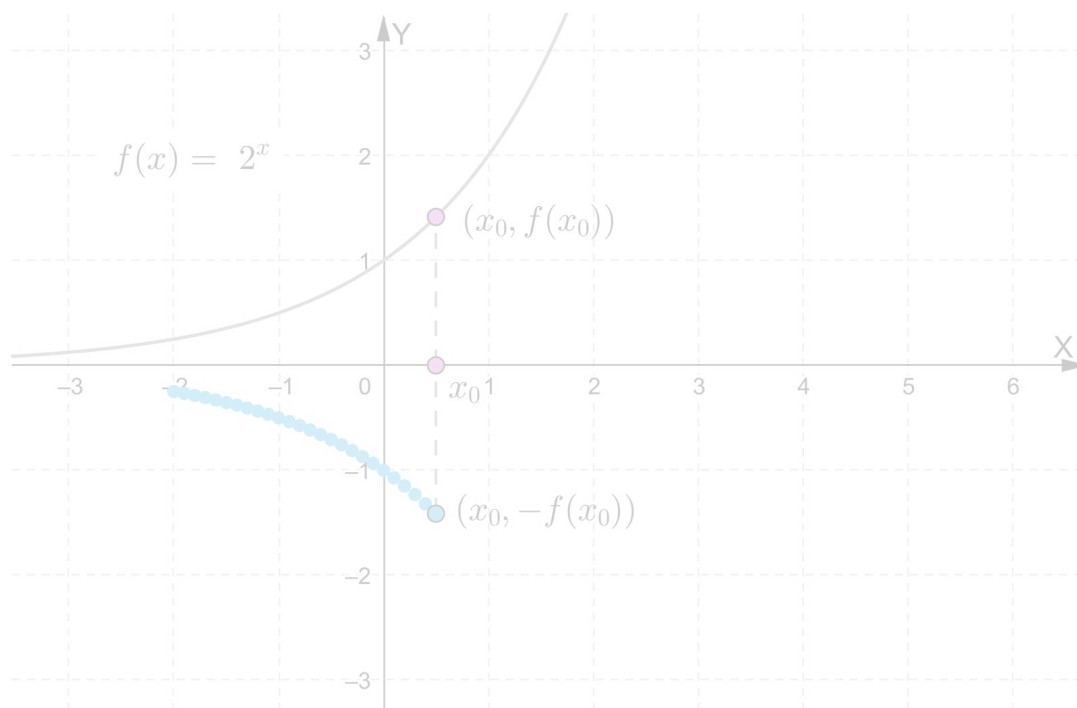
przekształcenie wykresu funkcji $-f(x)$

odbicie symetryczne wykresu funkcji $f(x)$ względem osi X

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie zaobserwuj, które własności funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x$ ulegają zmianie przy przekształceniu $-f(x)$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dk0yzb4r3>

Polecenie 2

Dana jest funkcja $f(x) = (\sqrt{2})^x$. Niech $g(x) = -f(x)$.

- podaj wzór funkcji g ,
- sprawdź, czy $g(-3) < g(2)$,
- dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości mniejsze od -2 ?

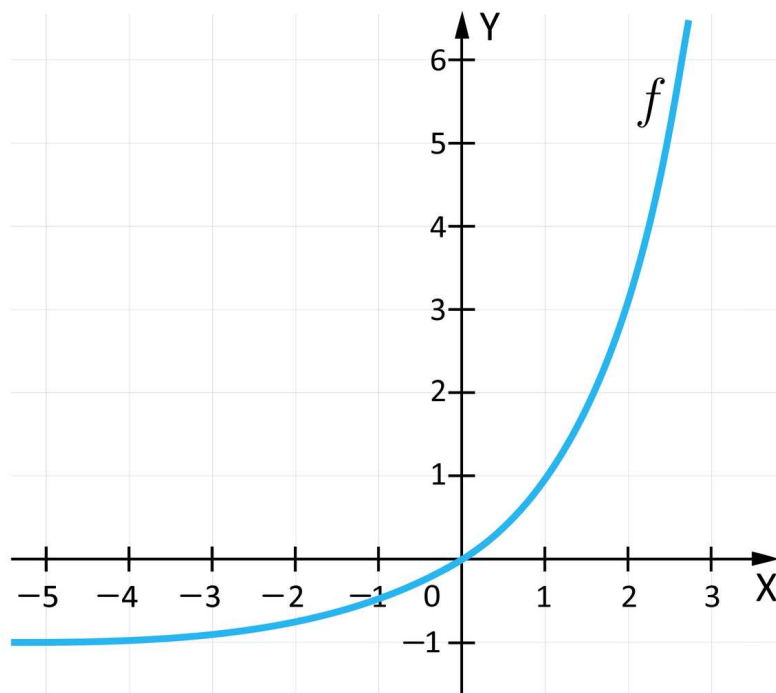
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$.



Uzupełnij zdanie.

Zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział .

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Oznaczmy $g(x) = -f(x)$. Połącz odpowiadające sobie wartości funkcji $g(x)$.

$g(2)$

-1

$g(-2)$

$-\frac{1}{9}$

$g(-1)$

-3

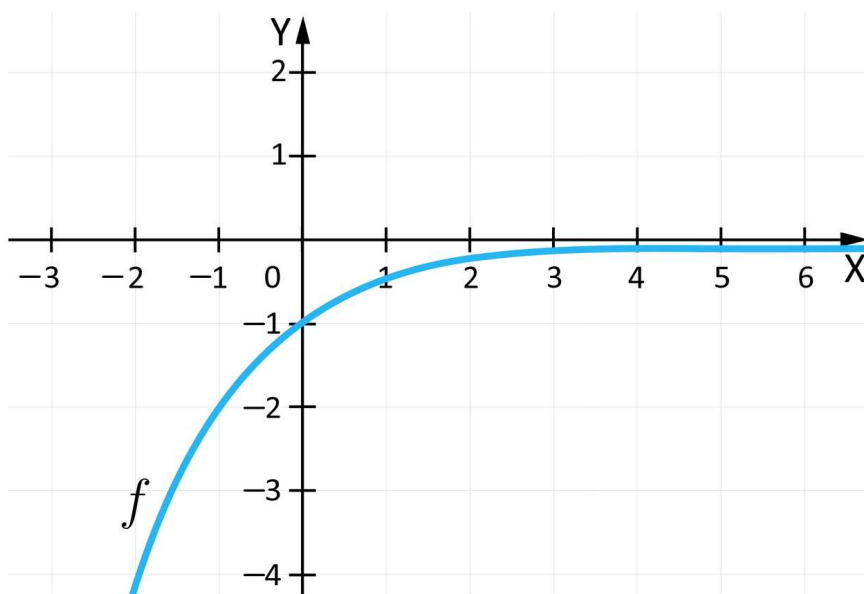
$g(0)$

-9

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Wybierz stwierdzenia, które są prawdziwe. Jeżeli $y = -f(x)$, to

☐ funkcja ma jedno miejsce zerowe

☐ zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0)$

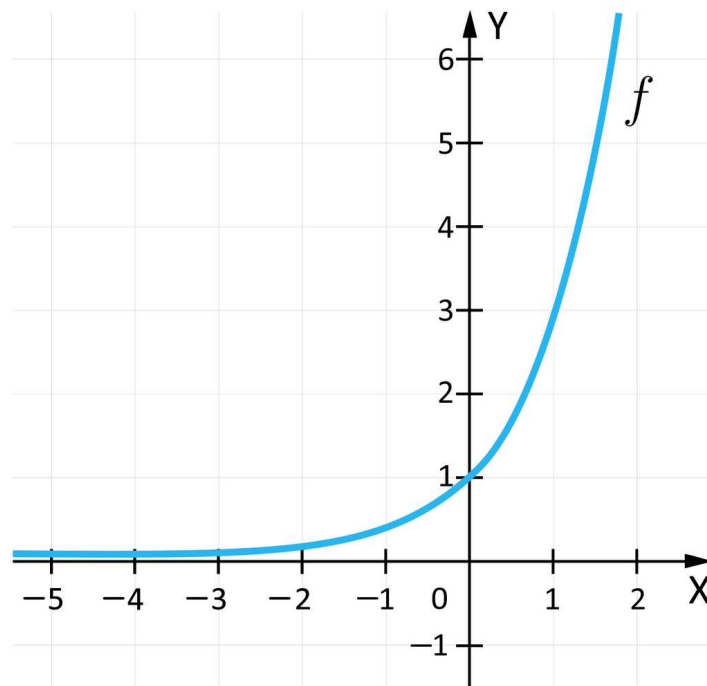
☐ zbiorem wartości jest przedział $(0, \infty)$

☐ zachodzi warunek $f(-1) = 2$

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 3^x$.



Niech $g(x) = -f(x)$. Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami:

$$g(x) < -1 \text{ dla } x \in (\text{ }, \infty)$$

$$g(x) > -3 \text{ dla } x \in (-\infty, \text{ })$$

$$g(x) = -9 \text{ dla } x = \text{ }$$

Ćwiczenie 5



Wiadomo, że dziedziną funkcji $f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$ jest zbiór $x \in (-1, 3)$.

Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $y \in \text{ }.$

$$\left(\frac{1}{4}, 64\right)$$

$$(-64, 4)$$

$$\left(-4, -\frac{1}{64}\right)$$

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wykresy funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ oraz $g(x) = -(\sqrt{2})^x$:

- ☐ przecinają się w dokładnie jednym punkcie
- ☐ są symetryczne względem osi X układu współrzędnych
- ☐ przedstawiają funkcje malejące

Ćwiczenie 7



Dany jest wykres funkcji $f(x) = 4^x$.

Pogrupuj elementy.

$f(x)$

funkcja jest malejąca

przechodzi przez *III* i *IV* ćwiartkę układu współrzędnych

$-f(x)$

przechodzi przez *I* i *II* ćwiartkę układu współrzędnych

funkcja jest rosnąca

do wykresu funkcji należy punkt $(-1, \frac{1}{4})$

do wykresu funkcji należy punkt $(-1, -\frac{1}{4})$

Ćwiczenie 8



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wykresy funkcji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ oraz $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ są symetryczne względem prostej:

☐ $y = x$

☐ $x = 0$

☐ $y = 0$

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji $y = -f(x)$, gdzie $f(x) = a^x$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji wykładniczych symetrycznych względem osi X układu współrzędnych,
- odczytuje własności funkcji wykładniczej na podstawie wykresu,
- korzysta z wykresu i własności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przygotowanie oferty kredytów bankowych z różnych banków. Uczniowie powinni zanotować wysokość maksymalnej pożyczki, oprocentowanie oraz czas trwania kredytu. Uczniowie przygotowują szkice wykresów pokazujących saldo konta przy ciągłym zaciąganiu kredytów.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji? Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.
2. Uczniowie omawiają materiały przygotowane na lekcję. Obliczają w grupach wysokość kapitału, na podstawie zdobytych informacji. Zauważają, że funkcja wykładnicza ma zastosowanie do obliczania wysokości kapitału złożonego na określony czas przy ustalonym oprocentowaniu lub przy braniu kredytów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela

odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy w temacie „Wykres i własności funkcji $y = -f(x)$, gdzie $f(x) = a^x$ ”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres i własności funkcji $y = -f(x)$, gdzie $f(x) = a^x$ ”).

Materiały pomocnicze:

- [Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej](#)

Wskazówki metodyczne:

- W celu poszerzenia wiadomości i umiejętności ze zrealizowanego tematu, uczniowie mogą rozwiązać zadania z e-podręcznika.
- Materiał z sekcji „Aplet” można wykorzystać do utrwalenia wiadomości w omawianym temacie lekcji.