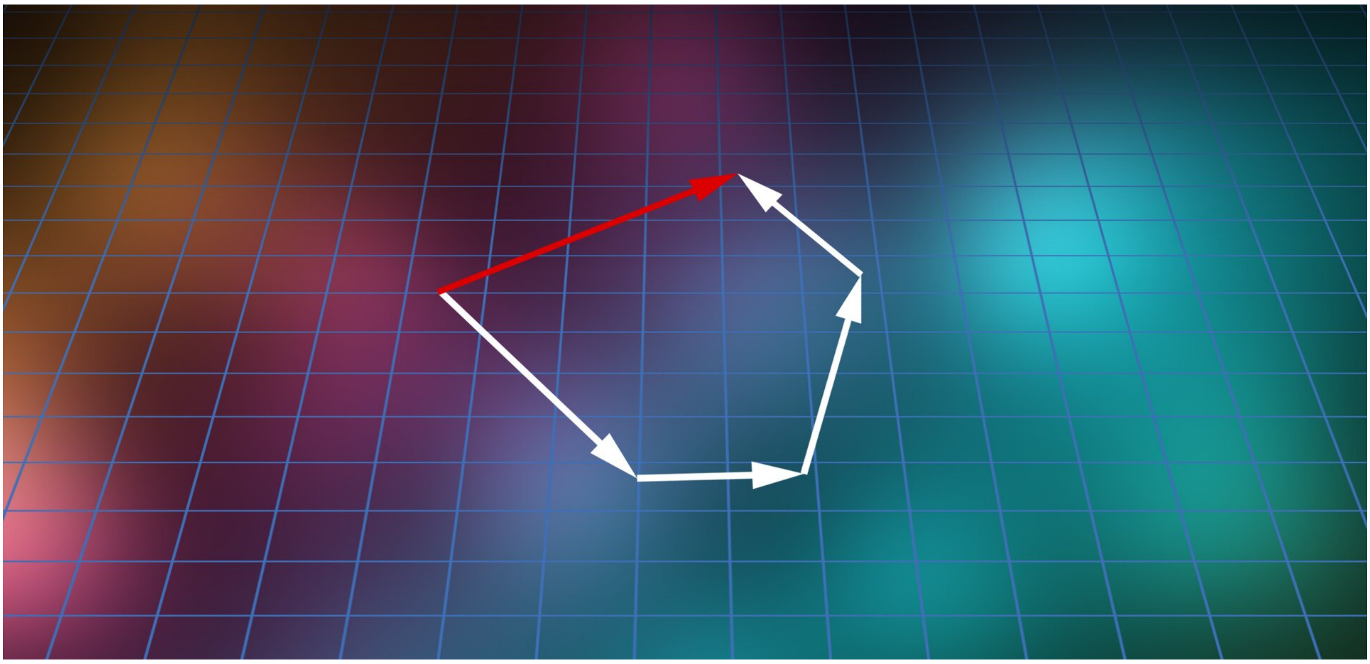


Jak posługiwać się współrzędnymi wektora?

Czy to nie ciekawe?

W fizyce często używamy pojęcia wektora. Wektor jest to uporządkowana para punktów, ale możemy też przedstawić wektor w postaci graficznej. Jeśli przedstawiamy wektor w postaci symbolicznej, możemy go opisać przez podanie współrzędnych jego punktu początkowego oraz końcowego, ale możemy też opisać go poprzez **współrzędne wektora**.

> **Twoje cele**
>
> W tym e-materiale:
>
> - zrozumiesz, czym są współrzędne wektora,
> - zastosujesz tę wiedzę do wyznaczania współrzędnych wektora,
> - objaśnisz różnice między współrzędnymi wektora a współrzędnymi początku i końca wektora,
> - wykorzystasz współrzędne wektora do wykonania zaproponowanych ćwiczeń.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Wektor jest to uporządkowana para punktów. Możemy go przedstawić w postaci graficznej, za pomocą strzałki lub poprzez podanie jego współrzędnych. Współrzędne wektora opisują nam różnice między punktem końcowym a początkowym wzdłuż każdej osi.

Aby odróżnić współrzędne wektora od współrzędnych jego punktu początkowego i końcowego zapisujemy te pierwsze w nawiasach kwadratowych. Jako przykład rozpatrzmy wektor o początku w punkcie $A(A_x, A_y)$ i końcu w punkcie $B(B_x, B_y)$. Współrzędne tego wektora zapisujemy:

$$\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x,\ (AB)_y\right]$$

Współrzędną wzdłuż osi x wyznaczamy następująco:

$$(AB)_x = B_x - A_x$$

Współrzędną wzdłuż osi y wyznaczamy następująco:

$$(AB)_y = B_y - A_y$$

A teraz pierwszy przykład: $A = (0, 0)$ i $B = (4, 3)$ czyli początek wektora jest w początku układu współrzędnych, a jego koniec w punkcie $(4, 3)$

$$A_x = 0,\ \ A_y = 0$$

$$B_x = 4,\ \ B_y = 3$$

więc:

Współrzędna wektora wzdłuż osi x:

$$(AB)_x = B_x - A_x = 4 - 0 = 4$$

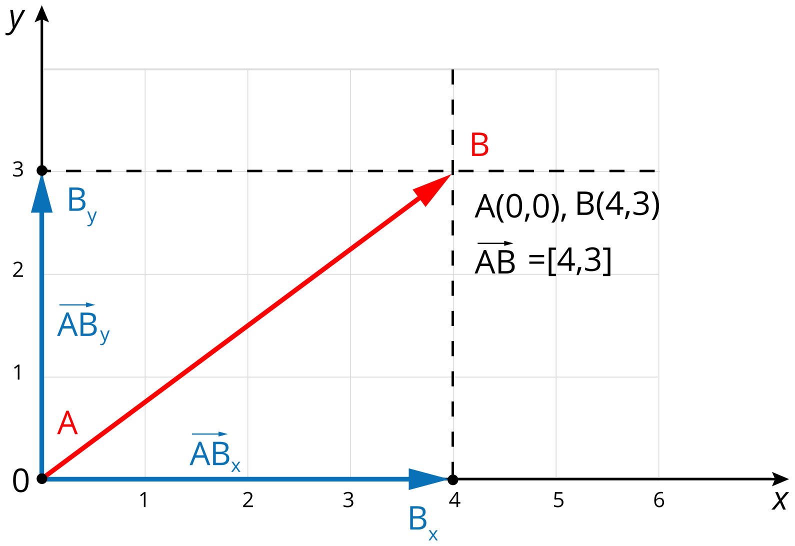
Współrzędna wzdłuż osi y:

$$(AB)_y = B_y - A_y = 3 - 0 = 3$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x,\ (AB)_y\right] = \left[4, 3\right]$$

Zauważ, że współrzędna wzdłuż osi x jest równa długości składowej wektora wzdłuż tej osi, natomiast współrzędna wzdłuż osi y jest równa długości składowej wektora wzdłuż osi y (patrz Rys. 1.).



Rys. 1. Wektor $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie $(4, 3)$ oraz współrzędne tego wektora. Pokazano też składowe tego wektora: $\overrightarrow{AB}_x$ oraz $\overrightarrow{AB}_y$

W drugim przykładzie rozpatrzmy wektor o początku w punkcie $(1, 2)$ i końcu w punkcie $(4, 3)$

$$A_x = 1, \ A_y = 2$$

$$B_x = 4, \ B_y = 3$$

więc:

Współrzędna wektora wzdłuż osi x:

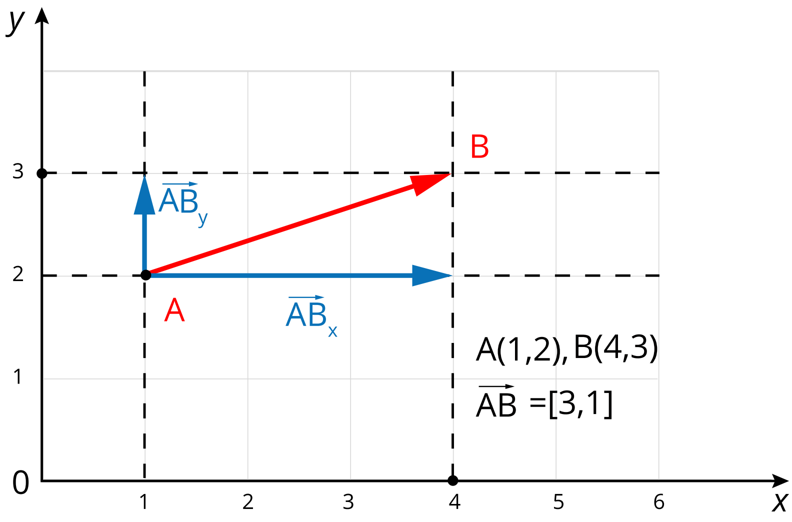
$$(AB)_x = B_x - A_x = 4 - 1 = 3$$

Współrzędna wektora wzdłuż osi y:

$$(AB)_y = B_y - A_y = 3 - 2 = 1$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x, \ (AB)_y\right] = \left[3, 1\right]$$



Rys. 2. Wektor $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $(1, 2)$ i końcu w punkcie $(4, 3)$ oraz współrzędne tego wektora. Pokazano też składowe tego wektora: $\overrightarrow{AB}_x$ oraz $\overrightarrow{AB}_y$

W trzecim przykładzie (Rys. 3.) zobaczymy, że współrzędne mogą mieć wartość dodatnią lub ujemną. Dla wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A(4, 3)$ a $B(1, 2)$

$$A_x = 4,\ \ A_y = 3$$

$$B_x = 1,\ \ B_y = 2$$

więc:

Współrzędna wektora wzdłuż osi x:

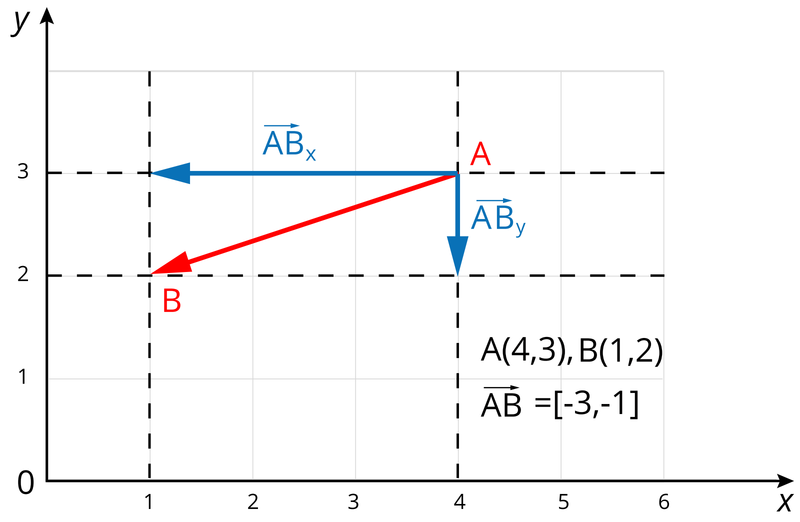
$$(AB)_x = B_x - A_x = 1 - 4 = -3$$

Współrzędna wektora wzdłuż osi y:

$$(AB)_y = B_y - A_y = 2 - 3 = -1$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

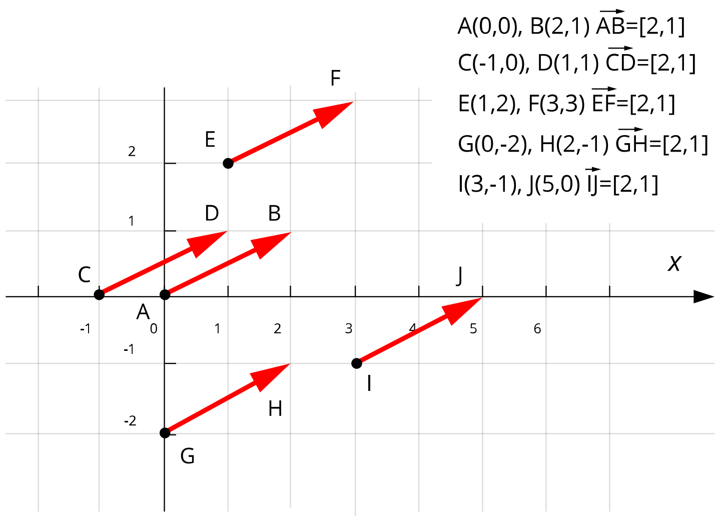
$$\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x,\ (AB)_y\right] = \left[-3, -1\right]$$



Rys. 3. Wektor $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $(4,3)$ i końcu w punkcie $(1,2)$ oraz współrzędne tego wektora. Pokazano też składowe tego wektora: $\overrightarrow{AB}_x$ oraz $\overrightarrow{AB}_y$

Mając dane współrzędne wektora można w łatwy sposób określić jego kierunek, zwrot oraz wartość. Nie można jednak określić jego punktu zaczepienia.

Kilka wektorów może mieć te same współrzędne, mimo że współrzędne ich punktów początkowych i końcowych są różne:



Rys. 4. Pięć wektorów o jednakowych współrzędnych i różnych punktach zaczepienia. Są one wszystkie do siebie równoległe (mają ten sam kierunek i zwrot) i mają te same wartości (długości)

Wszystkie te wektory mają taki sam kierunek, zwrot oraz wartość, czyli są sobie równe. Możemy więc wprowadzić nową definicję wektorów równych sobie:

Wektory są sobie równe wtedy, gdy mają równe wszystkie swoje współrzędne.

Skoro wprowadziliśmy nową definicję wektorów równych sobie, możemy też wprowadzić nową definicję wektorów przeciwnych:

Wektory są do siebie przeciwne, gdy każde z ich współrzędnych są do siebie przeciwne.

Tak więc wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ o współrzędnych $\overrightarrow{AB} = \left[AB_x, AB_y\right]$ będzie każdy wektor o współrzędnych $[-AB_x, -AB_y]$. Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{CD}$ o współrzędnych $\overrightarrow{CD} = \left[1, 2\right]$ będzie każdy wektor o współrzędnych $[(-1), (-2)]$.

Posługiwanie się współrzędnymi wektora może też ułatwić ich dodawanie. Dodając do siebie dwa wektory, których współrzędne znamy, dodajemy do siebie współrzędne tych wektorów wzdłuż poszczególnych osi. W ten sposób otrzymujemy współrzędne wektora będącego wynikiem dodawania. Weźmy dla przykładu dwa wektory $\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x,\ (AB)_y\right]$ oraz $\overrightarrow{CD} = \left[(CD)_x,\ (CD)_y\right]$. Ich sumą jest wektor $\overrightarrow{EF} = \left[(EF)_x,\ (EF)_y\right]$, gdzie:

$$(EF)_x = (AB)_x + (CD)_x$$

$$(EF)_y = (AB)_y + (CD)_y$$

Gdy więc $\overrightarrow{AB} = \left[1, 2\right]$ a $\overrightarrow{CD} = \left[3, 4\right]$, to

$$\overrightarrow{EF} = \left[(1+3), (2+4)\right] = \left[4, 6\right]$$

W ten sam sposób możemy odejmować wektory. Na przykład mając dane wektory $\overrightarrow{AB} = \left[(AB)_x,\ (AB)_y\right]$ i $\overrightarrow{CD} = \left[(CD)_x,\ (CD)_y\right]$, chcemy obliczyć wektor $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$. Otrzymujemy więc wektor $\overrightarrow{EF} = \left[(EF)_x,\ (EF)_y\right]$, gdzie:

$$(EF)_x = (CD)_x - (AB)_x$$

$$(EF)_y = (CD)_y - (AB)_y$$

Gdy więc ponownie przyjmiemy, że $\overrightarrow{AB} = \left[1, 2\right]$ a $\overrightarrow{CD} = \left[3, 4\right]$, otrzymujemy:

$$\overrightarrow{EF} = \left[(3-1),(4-2)\right] = \left[2,2\right]$$

Słowniczek

Twierdze Pitagorasa

(*ang.: Pythagoras' theorem*) twierdzenie pozwalające wyznaczyć długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym z wzoru: $c^2 = a^2 + b^2$ gdzie a i b są to przyprostokątne a c to przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym.

wektor

(*ang.: vector)* obiekt matematyczny opisywany za pomocą wielkości: modułu (nazywanego też – zdaniem niektórych niepoprawnie – długością lub wartością), kierunku wraz ze zwrotem (określającym orientację wzdłuż danego kierunku); istotny przede wszystkim w matematyce elementarnej, inżynierii i fizyce.

Film samouczek

Współrzędne wektora

Obejrzyj film, w którym pokazano przykład obliczania długości wektora, gdy dane są jego współrzędne.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Wysłuchaj alternatywnej ścieżki lektorskiej samouczka.

Polecenie 1

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

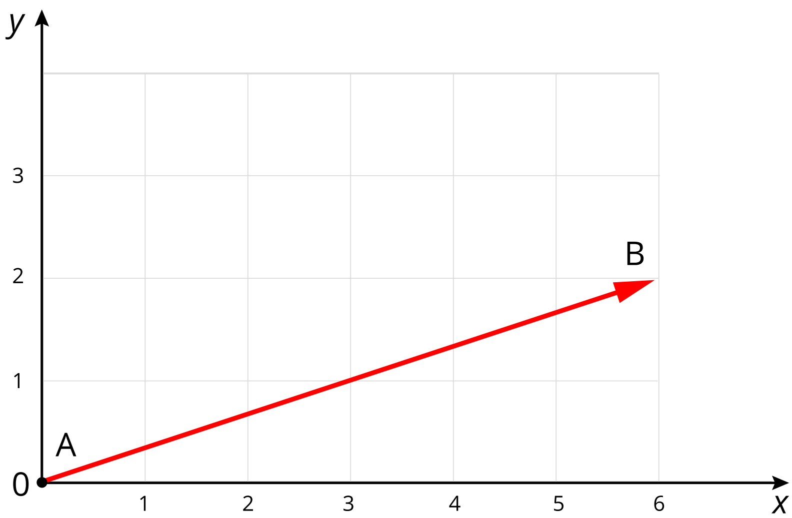
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Wskaż zdanie fałszywe:

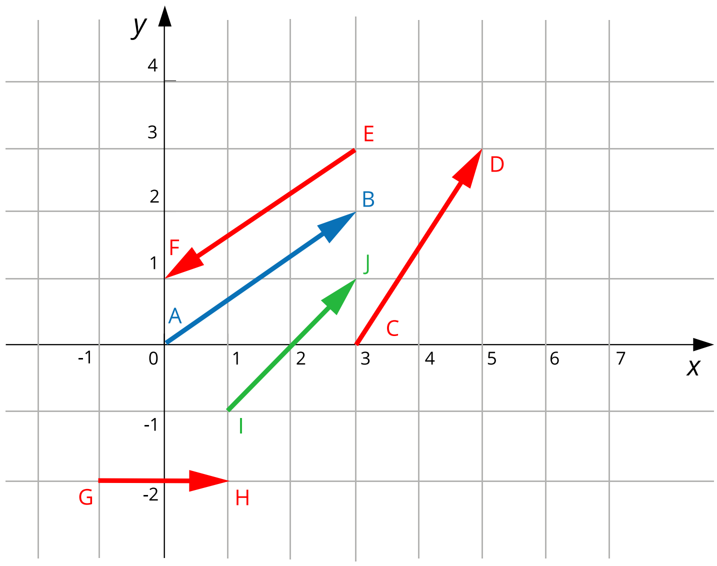
- Mając dane współrzędne wektora możemy określić jego kierunek.
- Mając dane współrzędne wektora nie możemy określić jego zwrotu.
- Mając dane współrzędne wektora możemy wyznaczyć jego długość (wartość).
- Mając dane współrzędne wektora nie możemy wskazać współrzędnych jego punktu zaczepienia.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Martyna Jakubowska
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Jak posługiwać się współrzędnymi wektora?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia - wymagania ogólne** I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania - wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne, wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe).
Kształtowane kompetencje kluczowe:	• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. zrozumie czym są współrzędne wektora; 2. pozna różnice między współrzędnymi wektora a a współrzędnymi punktu początkowego i końcowego tego wektora; 3. zrozumie sposób wyznaczania współrzędnych wektora; 4. przeanalizuje przykłady wykorzystania współrzędnych wektora; 5. zastosuje współrzędne wektora do wyznaczania długości wektora; 6. zastosuje zdobytą wiedzę teoretyczną wyznaczając współrzędne wektorów.
Strategie i metody nauczania:	– blended-learning, – nauczanie hybrydowe.
Formy zajęć:	– film samouczek, – praca w grupach.
Środki dydaktyczne:	– komputer z rzutnikiem, – kartka w kratkę, – linijka, – długopis.
Materiały pomocnicze:	Przygotowany przez nauczyciela zestaw kilku zadań, analogicznych do tych z zestawu ćwiczeń, który posłuży do zadania uczniom pracy domowej.
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Rozpoznanie wiedzy uczniów: Czy uczniowie słyszeli już o wektorach? Czy wiedzą, czym są wektory (może zetknęli się z tym pojęciem na matematyce)?. Czy wiedzą, co to są współrzędne punktu? Nauczyciel czyta i omawia **„Wprowadzenie”**.	
Faza realizacyjna:	

<table>
<tr><td colspan="2">Uczniowie samodzielnie czytają blok tekstowy, po czym wspólnie oglądają „Film samouczek”.
Nauczyciel sprawdza, czy uczniowie mają pytania związane z tekstem lub filmem. Uczniowie wspólnie zastanawiają się nad pytaniami, które się pojawiły. Nauczyciel naprowadza uczniów na właściwe odpowiedzi. Uczniowie wracają to wybranego fragmentu tekstu lub filmu, jeśli zajdzie taka potrzeba.
Uczniowie rozwiązują zadania z Zestawu ćwiczeń, co służy wykorzystaniu i ugruntowaniu zdobytej wiedzy.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Faza podsumowująca:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Uczniowie w grupach omawiają rozwiązania zadań. Wspólnie zastanawiają się nad tymi, które sprawiły im trudność. Każda z grup omawia dwa wskazane przez nauczyciela zadania „na forum klasy”.
Nauczyciel stwierdza, które zadania sprawiły uczniom kłopot i dlaczego. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określa stopień osiągnięcia wyznaczonych celów lekcji.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Praca domowa:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Na podstawie dokonanej analizy, nauczyciel wybiera trzy zadania (spośród przygotowanych przed lekcją), o zróżnicowanym stopień trudności, analogiczne do tych, które sprawiły uczniom najwięcej problemów. Zadanie te stanowić będą pracę domową dla uczniów.</td></tr>
<tr><td>Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:</td><td>Multimedium może być wykorzystane jako wstęp do lekcji lub w czasie lekcji tak, jak pokazano w scenariuszu.</td></tr>
</table>