



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych, które można sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych, które można sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Często zdarza się, że skomplikowana nierówność wyższego stopnia daje się sprowadzić do postaci iloczynowej. Postać iloczynowa jest wygodna do wyznaczenia pierwiastków równania i narysowania wykresu nierówności.

W tym materiale utrwalimy i rozszerzymy umiejętności dotyczące sprowadzania nierówności wielomianowych do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Twoje cele

- Sprowadzisz nierówności wyższych stopni do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.
- Rozwiążesz nierówności wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą z nierówności postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej polega na zapisaniu jej za pomocą iloczynu sum algebraicznych, w których niewiadoma jest jak najmniejszego stopnia.

Nierówność wielomianową możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów. Metoda grupowania wyrazów polega na wielokrotnym (jeśli jest to możliwe) wyciąganiu przed nawias wspólnego czynnika.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0$$

Grupujemy wyrazy pierwszy z drugim oraz trzeci z czwartym. Z pierwszej pary wyłączamy przed nawias jednomian x^2 , a z drugiej pary liczbę (-4) .

$$x^2(x + 3) - 4 \cdot (x + 3) > 0$$

Wspólny czynnik $(x + 3)$ wyłączamy przed nawias.

$$(x + 3)(x^2 - 4) > 0$$

Otrzymaliśmy nierówność wielomianową zapisaną w postaci iloczynowej. Obliczymy teraz miejsce zerowe wielomianu $W(x) = (x + 3)(x^2 - 4)$.

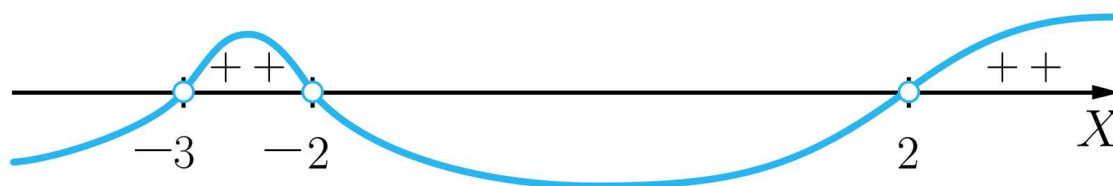
$$(x + 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ lub } (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = (-3) \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = (-2)$$

Szkicujemy wykres wielomianu zaczynając od prawej strony i od góry. Wszystkie pierwiastki wielomianu są pojedyncze więc wykres przecina oś X .



$$x \in (-3, -2) \cup (2, \infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby x takie, że $x \in (-3, -2) \cup (2, \infty)$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $x^5 + x^3 - 8x^2 - 8 < 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^5 + x^3 - 8x^2 - 8 < 0$$

$$x^3(x^2 + 1) - 8 \cdot (x^2 + 1) < 0$$

$$(x^2 + 1)(x^3 - 8) < 0$$

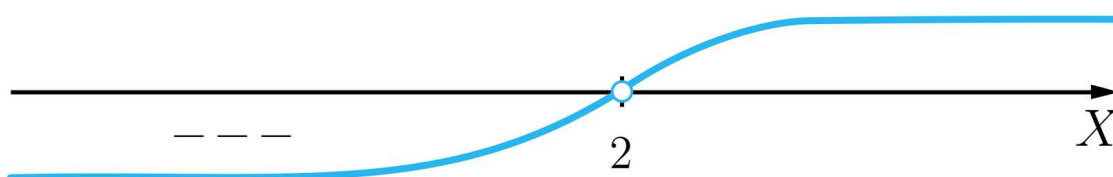
Obliczamy miejsce zerowe wielomianu $W(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 8)$.

$$(x^2 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ lub } x^3 - 8 = 0$$

$$\text{sprzeczność lub } x^3 = 8$$

$$\text{bo } x^2 + 1 > 0 \text{ lub } x = 2$$



$$x \in (-\infty, 2)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, 2)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $x^3 - 5x^2 + 4x \geq 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^3 - 5x^2 + 4x \geq 0$$

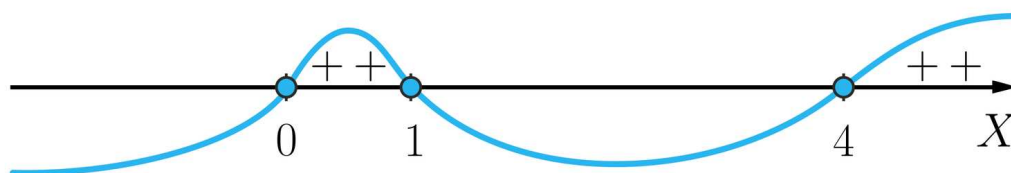
$$x(x^2 - 5x + 4) \geq 0$$

$$x(x^2 - x - 4x + 4) \geq 0$$

$$x[x(x - 1) - 4 \cdot (x - 1)] \geq 0$$

$$x(x - 1)(x - 4) \geq 0$$

Miejsca zerowe wielomianu to 0, 1, 4.



$$x \in \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $5x^3 + 5x^2 - 4x - 4 < 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$5x^3 + 5x^2 - 4x - 4 < 0$$

$$5x^2(x + 1) - 4 \cdot (x + 1) < 0$$

$$(x + 1)(5x^2 - 4) < 0$$

Obliczymy miejsca zerowe wielomianu $W(x) = (x + 1)(5x^2 - 4)$.

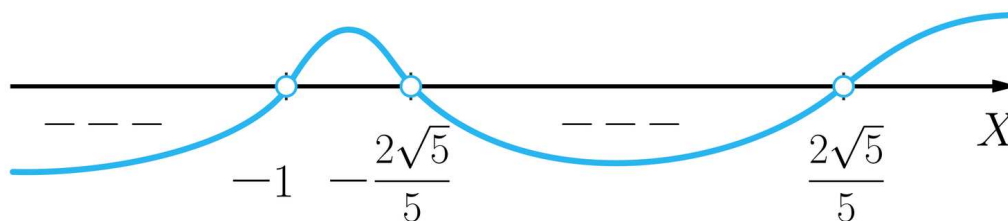
$$(x + 1)(5x^2 - 4) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ lub } 5x^2 - 4 = 0$$

$$x = (-1) \text{ lub } x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ lub } x = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ lub } x = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$



$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $x^4 + 3x^2 + 2 < 0$.

$$x^4 + 3x^2 + 2 < 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^2 + 2 < 0$$

$$x^2(x^2 + 1) + 2 \cdot (x^2 + 1) < 0$$

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2) < 0$$

Wielomian $W(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$ nie posiada miejsc zerowych bo $x^2 + 1 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $x^2 + 2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Nierówność nie posiada rozwiązania.

Słownik

nierówność wielomianowa

każda z nierówności w postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

metoda grupowania wyrazów

polega na wielokrotnym wyciąganiu przed nawias wspólnego czynnika

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj infografikę i zapoznaj się z metodą sprowadzania nierówności wielomianowych do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \leq 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Nierówność $x^3 + x - 2x^2 - 2 > 0$ zapisana w postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów to:

☐ $(x - 2)(x^2 + 1) < 0$

☐ $(x + 2)(x^2 + 1) > 0$

☐ $(x - 2)(x^2 + 1) > 0$

☐ $(x - 2)^2(x + 1) > 0$

Ćwiczenie 2



Wybierz wszystkie nierówności równoważne nierówności $x^3 + x^2 - 2x - 2 \leq 0$.

☐ $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 1) \leq 0$

☐ $(x^2 + 2)(x + 1) \geq 0$

☐ $(x - 2)^2(x + 1) \leq 0$

☐ $x^2(x + 1) - 2 \cdot (x + 1) \leq 0$

☐ $x^2(x + 1) + 2 \cdot (x + 1) \geq 0$

☐ $(x^2 - 2)(x + 1) \leq 0$

☐ $2 \cdot (x + 1) - x^2(x + 1) \geq 0$

Ćwiczenie 3

Wybierz zbiór rozwiązań nierówności $2x^3 + 4x^2 - x - 2 < 0$.

$$\bigcirc \quad (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

$$\bigcirc \quad (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\bigcirc \quad (-\infty, 2) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\bigcirc \quad \left(-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary nierówności równoważne.

$$2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$2x^3 + x^2 - 2x - 1 > 0$$

$$4x^3 - 4x^2 - x + 1 > 0$$

$$4x^3 + 4x^2 - x - 1 > 0$$

Ćwiczenie 5

Przeciągnij odpowiednie wyrażenie w wyznaczone miejsce.

Zapisz nierówność $x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 8 < 0$ w postaci iloczynowej.

$$(x^2 + 4) \cdot (x + \sqrt[3]{2}) \cdot \boxed{} \leq 0$$

$$\left(x^2 + 2\sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}\right)$$

$$\left(x^2 + 2\sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}\right)$$

$$\left(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}\right)$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij brakujące liczby.

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^6 - 17x^4 + 16x^2 \geq 0$ jest

$(-\infty, \boxed{}) \cup \langle -1, \boxed{} \rangle \cup \langle \boxed{}, \infty)$

0

-1

1

-4

4

Ćwiczenie 7



Posortuj rozwiązanie nierówności i podaj zbiór rozwiązań nierówności.

$$[x^2(x^2 + 1) - 4 \cdot (x^2 + 1)](x + 3) < 0$$



$$x \in (-\infty, -3) \cup \langle -2, 2 \rangle$$



$$x(x^4 - 3x^2 - 4) + 3 \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) < 0$$



$$(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3) < 0$$



$$(x^4 + x^2 - 4x^2 - 4)(x + 3) < 0$$



$$(x^4 - 3x^2 - 4)(x + 3) < 0$$



$$x^2 + 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x + 3 = 0$$



$$\text{sprzeczność lub } x = 2 \text{ lub } x = (-2) \text{ lub } x = (-3)$$



$$x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12 < 0$$



$$x^5 - 3x^3 - 4x + 3x^4 - 9x^2 - 12 < 0$$



$$(x^2 + 1)(x^2 - 4)(x + 3) < 0$$



Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność $x^5 - 2x^4 + 9x^3 - 18x^2 + 20x - 40 < 0$ metodą grupowania wyrazów.
Przeciagnij poprawne rozwiązanie.

$x \in$

☐ $(2, \infty)$

☐ $(-\infty, 2) \cup (1, \infty)$

☐ $(-\infty, 2)$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza nierówności wyższych stopni do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów
- rozwiązuje nierówności wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych nierówności zapisanych w postaci iloczynu dwóch sum algebraicznych. Uczniowie podają rozwiązania tych równań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie sposobu doprowadzania wielomianów do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie przygotowany wcześniej przykład. Kolejna grupa dodaje swój przykład itd. W ten sposób uczniowie przypominają metodę rozkładu wielomianu na czynniki.
2. Uczniowie w parach zapoznają się z materiałem z sekcji Przeczytaj, oglądają infografikę i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów rozwiązywania nierówności dających się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem oraz na zajęciach pokazujących zastosowanie wzoru skróconego mnożenia.