



Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wiemy, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków. Ważnym zagadnieniem związanym z rozwiązywaniem równań wielomianowych jest umiejętność wyznaczenia wszystkich pierwiastków wielomianu, czyli po prostu wszystkich rozwiązań równania $W(x) = 0$.

Czasem jest to stosunkowo proste, czasem trudne, czasem wręcz niemożliwe. W tym materiale pokażemy, jak wyznaczyć pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twoje cele

- Podasz i udowodnisz twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Wyznaczysz pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach wymiernych.
- Zastosujesz to twierdzenie do znalezienia wszystkich (również niewymiernych) pierwiastków wielomianu w niektórych przypadkach.

Przeczytaj

Twierdzenie: o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$.

Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Dowód

Dane są liczby całkowite p, q spełniające założenia.

Wiemy, że $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, czyli

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Po obustronnym przemnożeniu przez q^n mamy

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0, \text{ więc } a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$$

Zauważmy, że liczba

$$\begin{aligned} a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} &= \\ &= p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \end{aligned}$$

jest podzielna przez p , więc również $a_0 q^n$ musi być podzielna przez p .

Liczby p i q są z założenia względnie pierwsze (bo ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny), więc p musi być dzielnikiem a_0 .

Analogicznie dowodzimy, że q musi być dzielnikiem a_n .

Wystarczy zauważyć, że liczba

$$a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = q(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1q^{n-2} + a_0q^{n-1})$$

czyli $a_n p^n$ musi być podzielne przez q .

Przykład 1

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$W(x) = 2x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 2x + 15.$$

- Na początek sprawdźmy, czy wielomian ma pierwiastki całkowite. Zgodnie z [twierdzeniem o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych](#) szukamy ich wśród dzielników wyrazu wolnego (liczby $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$).
- Po wykonaniu obliczeń można zauważyć, że $W(5) = 0$.
- Korzystając z [twierdzenia Bézouta](#) po wykonaniu odpowiedniego dzielenia wielomianów możemy więc zapisać $W(x) = (x - 5)(2x^3 - x^2 - x - 3)$.
- Zajmiemy się teraz wielomianem $W_1(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$. Jeżeli sprawdziliśmy wcześniej, że $\pm 1, \pm 3$ nie są pierwiastkami $W(x)$ to wiemy, że wielomian $W_1(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.
- Sprawdźmy, czy ma jakiś pierwiastek niecałkowity wymierny. Zgodnie z [twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych](#) wystarczy przeanalizować liczby $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.
- Po wykonaniu rachunków można zauważyć, że $W_1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.
- Po podzieleniu przez dwumian $x - \frac{3}{2}$ uzyskujemy równość $W(x) = (x - 5)\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)$.

- Za pomocą wyróżnika Δ możemy sprawdzić, że wielomian $W_2(x) = 2x^2 + 2x + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
- Jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $W(x)$ są zatem liczby 5 oraz $\frac{3}{2}$.

Przykład 2

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$W(x) = 2x^4 + 7x^3 - 10x^2 - 21x + 12.$$

Zauważmy, że twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych możemy wykorzystać również do wyszukania wszystkich pierwiastków wymiernych wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Wystarczy zauważyć, że przemnożenie wielomianu przez stałą niezerową nie zmienia jego pierwiastków.

Każdy wielomian o współczynnikach wymiernych możemy zatem sprowadzić do wielomianu o współczynnikach całkowitych mnożąc go przez wspólną wielokrotność mianowników wszystkich współczynników wielomianu.

Pokażemy to w kolejnych dwóch przykładach.

Przykład 3

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$W(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{15}x^3 - \frac{19}{30}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{2}{15}.$$

- Zauważmy, że po przemnożeniu wielomianu $W(x)$ przez 30 otrzymamy wielomian $V(x)$ o współczynnikach całkowitych mający te same pierwiastki, co wielomian $W(x)$.
- $V(x) = 15x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 4x + 4$

- Spróbujmy na początek wyszukać pierwiastki całkowite wielomianu $V(x)$ analizując jego wartości dla liczb $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ (dzielniki wyrazu wolnego).
- Łatwo zauważymy, że $V(1) = V(-1) = 0$, więc wielomian $V(x)$ jest podzielny przez $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$.
- Wykonajmy dzielenie dowolnym sposobem (możemy np. użyć algorytmu dzielenia pisemnego lub dwukrotnie schematu Hornera). Uzyskamy zapis $V(x) = (x + 1)(x - 1)(15x^2 - 4x - 4)$.
- Za pomocą wyróżnika Δ możemy wyznaczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego $15x^2 - 4x - 4$ - są to liczby $-\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{3}$.
- Podsumujmy: wielomian $W(x)$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste: $1, -1, -\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{3}$.

Przykład 4

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$W(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + x + \frac{3}{5}.$$

Słownik

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$.

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0

twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$.

Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionym w animacji twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych wielomianu mającego współczynniki całkowite i jego zastosowaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D19yMJSnk>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu.

Polecenie 2

Postępując się metodami zaprezentowanymi w animacji wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

- $F(x) = 4x^5 + 6x^4 + 5x^2 - 9x - 6$,
- $G(x) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 18x - 21$,
- $H(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$.

Polecenie 3

Nie wykonując dokładnych obliczeń uzasadnij, dlaczego poniższe wyrażenia nie są równe 0.

1) $2 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 1$

2) $2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 1$

3) $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres rozszerzony Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych i jego dowód;
- znajduje pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach wymiernych;
- stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu w niektórych przypadkach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj” oraz animacją. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam / nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują polecenie 2 w sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- [Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc później samodzielnie rozwiązać zadania na lekcji.
- Nauczyciel może wykorzystać animację na lekcji poświęconej rozwiązywaniu równań wymiernych.