



123456789

Doświadczenie losowe – co to takiego?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film edukacyjny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Doświadczenie losowe – co to takiego?

Źródło: Josh Appel, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W naukach przyrodniczych uważa się, że każde zjawisko ma swoją przyczynę. Jednak w wielu przypadkach nie dysponujemy wystarczającą wiedzą (przynajmniej na razie), by choć w przybliżeniu określić przebieg danego zjawiska. Przykładem mogą być zjawiska kwantowe (rozpady jądrowe, fale elektromagnetyczne), czy losowanie kul w Lotto. Teoretycznie wynik losowania kul jest możliwy do przewidzenia, jednak nawet niewielki błąd w pomiarze położenia jednej z kul, powoduje ogromną trudność w przewidzeniu położenia pozostałych kul. Pojęcie przypadku zależy więc od informacji, którymi dysponuje osoba oceniająca zdarzenie.

Od zarania dziejów ludzie usiłowali przewidzieć rozwój wypadków. Chodzili do



Fortuna – bogini zbiegów okoliczności, szczęścia i przeznaczenia

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

wróżek, by poznać przyszłość i pomóc fortunie.

Matematycy, choć często bywali magami i alchemikami, nie bardzo wierzyli wyroczniom i jasnowidzom. Woleli brać los w swoje ręce i tworzyć teorie, które miały pomóc określić możliwość zajścia danego zdarzenia. Wymyślili więc rachunek prawdopodobieństwa, którego jednym z pojęć jest doświadczenie losowe.

Właśnie poznanie tego pojęcia będzie treścią tego materiału.

Twoje cele

- Rozpoznasz doświadczenie losowe.
- Podasz przykład doświadczenia losowego.
- Podasz przykład doświadczenia, które nie jest doświadczeniem losowym.
- Uzasadnisz, że dane doświadczenie jest doświadczeniem losowym.

Przeczytaj



Źródło: Arnaud 25, dostępny w internecie:
commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

O procesie losowym mówimy jako o czymś co ewaluje w czasie, w sposób, którego wyniku nie możemy przewidzieć. Klasycznym przykładem jest dym wydobywający się z komina, którego dokładnego kształtu wcześniej nie można określić. Można jedynie przypuszczać, korzystając z teorii prawdopodobieństwa, jak on może wyglądać. Z procesami zasadniczo losowymi mamy dość rzadko do czynienia. A to, że nie wiemy jaki będzie wynik danego zdarzenia wynika z tego, że nie posiadamy dostatecznej liczby potrzebnych informacji lub mamy ich zbyt wiele i nie jesteśmy w stanie ich przeanalizować. Najczęściej zgadujemy, jaki będzie finał danej sytuacji w sposób subiektywny – opierając się na przypuszczeniach. Jeśli weźmiemy pod uwagę wiele podobnych zdarzeń oraz ich wyniki i na tej podstawie wysnujemy wniosek, nasze przypuszczenia będą bardziej obiektywne.

W teorii prawdopodobieństwa jednym z najważniejszych pojęć jest **doświadczenie losowe**. Pojmowane jako pewien eksperyment, którego wyniku nie można przewidzieć. Eksperyment ten można powtarzać w teoretycznie takich samych warunkach, a wyniki mogą być różne. Wynik takiego eksperymentu jest działem przypadku. Ważne jest jednak, że zbiór wszystkich możliwych wyników jest określony. Jeśli tak określona procedura ma tylko **jeden możliwy wynik**, to mówimy że doświadczenie jest **deterministyczne**.

Definicja: Doświadczenie losowe

Symbolem nieprzewidywalności, losowości (również hazardu) jest gra w kości. Jest metamorfozą wszystkich dziedzin wiedzy objętych mianem „nauk przypadku”.

W miarę postępu nauki, coraz mniej zdarzeń można nazwać przypadkowymi. Nawet przewidywanie pogody, uważane za całkowicie niemożliwe, coraz częściej sprawdza się w krótkich okresach czasu.



Źródło: Jacek Halicki, dostępny w internecie:
commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

Doświadczenie losowe, to doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w identycznych (lub zbliżonych) warunkach, które ma kilka możliwych wyników i którego wyniku nie daje się jednoznacznie przewidzieć.

Przykład 1

Rzucamy symetryczną monetą.



reszka



orzeł

Możemy otrzymać orła, albo reszkę. Wyniku rzutu nie możemy przewidzieć.

Rzut monetą to przykład doświadczenia losowego.

Przykład 2

Rzucamy dwiema symetrycznymi nierozróżnialnymi monetami. Tym razem mamy więcej możliwych wyników. Możemy otrzymać dwie reszki, dwa orły albo reszkę i orła (nie ważne jest przy tym na której monecie wypadnie orzeł, a na której reszka). Wyniku rzutu nie możemy przewidzieć.

Rzut dwiema nierozróżnialnymi monetami to przykład doświadczenia losowego.

Przykład 3

Tym razem rzucamy dwiema różnymi monetami. Na przykład monetą pięciogroszową i jednogroszową.



Są cztery możliwe wyniki. Wyniku rzutu nie możemy przewidzieć.

Przykład 4

Losujemy jedną piłkę z pojemnika, w którym znajdują się piłki niebieskie, czarne i szare.

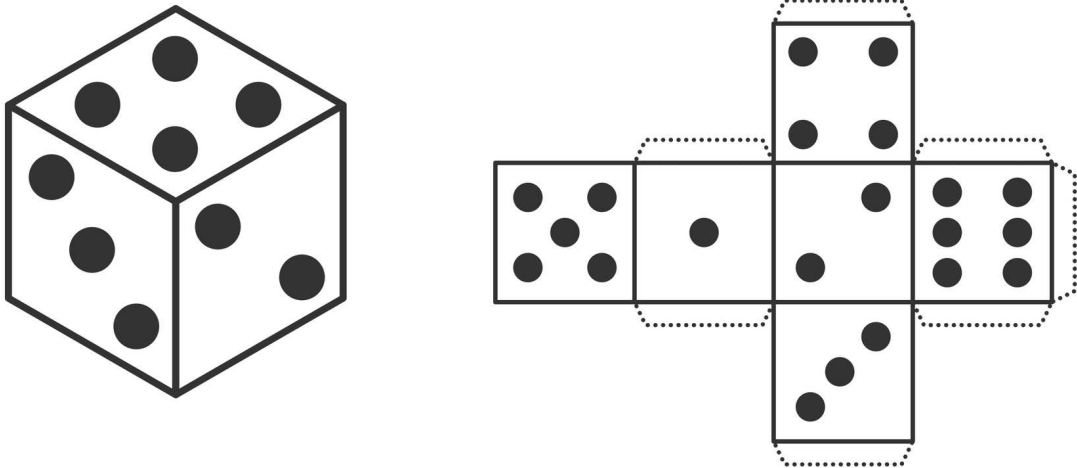
Piłek niebieskich jest tyle samo co czarnych, czarnych piłek jest tyle samo co szarych.



Można wylosować piłkę niebieską, czarną lub szarą. Wyniku losowania nie można przewidzieć. Losowanie piłki z tego pojemnika jest doświadczeniem losowym.

Przykład 5

Rzucamy symetryczną, sześcienną kostką do gry.



Możemy wyrzucić ściankę z 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczkami. Wyniku rzutu nie można przewidzieć.

Rzut kostką jest doświadczeniem losowym.

Przykład 6

Obserwujemy walkę dwóch szermierzy – pana A z panem B . Może zwyciężyć pan A lub pan B .

Czy wynik pojedynku jest doświadczeniem losowym?

Nie, gdyż wynik zależy w największym stopniu od umiejętności i doświadczenia zawodników.

Przykład 7

W pewnym sklepie stoi urna, do której klienci mogą wrzucać kartki ze swoimi nazwiskami. Raz dziennie losowana jest jedna kartka. Wylosowany klient otrzymuje czekoladę. Czy losowanie kartek (rozpatrywane w ciągu tygodnia) jest doświadczeniem losowym?

Niestety nie, bo codziennie do sklepu przychodzą inni klienci i eksperymentu nie można przeprowadzić w tych samych warunkach.

Będziemy rozpatrywać **doświadczenie losowe**, które ma co najmniej dwa wyniki. Każdy z pojedynczych wyników to **zdarzenie elementarne**.

Przykład 8

Podamy kilka przykładów zdarzeń elementarnych.

Doświadczenie losowe	Przykład zdarzenia elementarnego
rzut czworościenną kostką, na której zapisane są liczby 3, 5, 7, 9	wyrzucenie 3
rzut trzema kostkami do gry	wyrzucenie trzech orłów
rzut sześcienną kostką i monetą	wyrzucenie 6 i reszki
wyciągnięcie z talii 52 kart jednej karty	wyciągnięcie damy pik

Jeśli doświadczenie losowe ma dokładnie dwa różne możliwe wyniki, nazywa się próbą Bernoulliego, od nazwiska szwajcarskiego matematyka Jacoba Bernoulliego.

Definicja: Próba Bernoulliego

Próba Bernoulliego, to eksperyment losowy, który ma dwa różne możliwe wyniki. Wyniki te zazwyczaj określane są jako sukces albo porażka.

Przykład 9

Podamy kilka przykładów klasycznych prób Bernoulliego.

Klasyczne przykłady prób Bernoulliego to:

- rzut monetą (orzeł, reszka);
- narodziny dziecka (chłopiec, dziewczynka);
- zakup losu na loterii (wygrana, przegrana);
- wybór jednej z dwóch możliwych odpowiedzi na pytanie, na które nie znasz odpowiedzi (trafione, pudło).

Słownik

doświadczenie losowe

to doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w identycznych (lub zbliżonych) warunkach, które ma kilka możliwych wyników i którego wyniku nie daje się jednoznacznie przewidzieć

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami doświadczeń losowych przedstawionymi w filmie edukacyjnym.
Podaj podobne przykłady.


Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DdLkPm8Xr>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej doświadczeń losowych.

Polecenie 2

W pudle znajdują się kartoniki, na których zapisane są cyfry 1, 2, 3. Po pięć kartoników z każdą z zapisanych cyfr. Losujemy dwie cyfry i układamy z nich liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie możliwe liczby, które można w ten sposób uzyskać.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



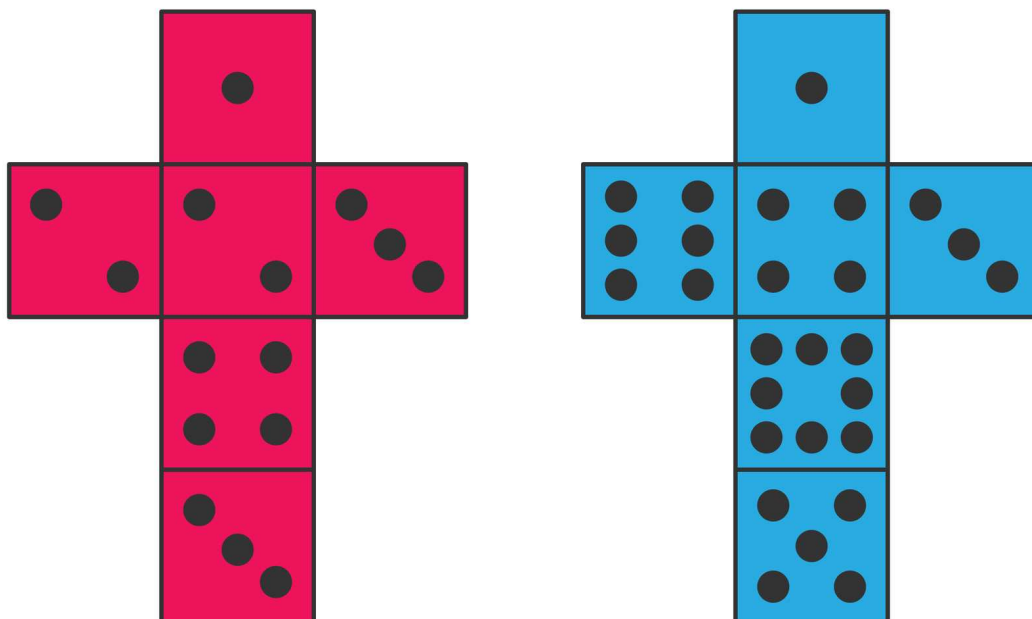
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Rzucamy sześciennymi kostkami (zwanymi kostkami Sichermana, od nazwiska ich twórcy), których siatki przedstawia rysunek.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W szufladzie znajdują się 2 serwetki białe i 5 zielonych.

Doświadczenie polega na wyciągnięciu najpierw jednej serwetki, następnie drugiej i kolejno trzeciej.

Wypisz wszystkie możliwe wyniki tych losowań, uwzględniając tylko kolory losowanych serwetek. Ile jest tych wyników?

Ćwiczenie 8



Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu 2 spośród 6 osób, przy czym nie jest ważna kolejność losowania. Korzystając z narzędzi kombinatorycznych określ, ile jest możliwych wyników takiego wyboru.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Doświadczenie losowe – co to takiego?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje doświadczenia losowe
- podaje przykłady doświadczeń losowych
- podaje przykład doświadczenia, które nie jest doświadczeniem losowym
- uzasadnia, że dane doświadczenie jest doświadczeniem losowym
- współpracuje w grupie, pełniąc powierzone role

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- przeciąganie liny
- studium przypadku

- każdy jedno zdanie

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą „każdy jedno zdanie” przypominają sobie wiadomości z kombinatoryki – uczniowie kolejno podają jeden wzór kombinatoryczny, informację, twierdzenie kombinatoryczne, itp.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Jeden z uczniów, wskazany kilka dni wcześniej przez nauczyciela, przedstawia „studium przypadku” czyli opowiada o zdarzeniach, które rzekomo miały miejsce w ostatnim czasie w jego życiu.
2. Zadaniem słuchaczy jest ustalenie, które z tych zdarzeń można nazwać doświadczeniami losowymi, a które nie.
3. W razie wątpliwości, nauczyciel zadaje pomocnicze pytania.
4. Następnie uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i filmem edukacyjnym.
5. Teraz uczniowie pracują w grupach. Zadaniem każdej grupy jest zaprojektowanie kilku doświadczeń takich, że niektóre z nich można nazwać doświadczeniami losowymi, a inne nie. Przy czym muszą to być inne eksperymenty niż te, zawarte w materiałach.
6. Grupy kolejno demonstrują doświadczenia, a pozostali metodą „przeciągania liny” usiłują zdyskredytować przygotowane eksperymenty, czyli udowodnić, że doświadczenie losowe nie jest doświadczeniem losowym, itd. Zadaniem grupy jest obronienie swojego stanowiska.
7. Podsumowaniem tej części lekcji może być dyskusja – dlaczego ważne dla matematyka jest ustalenie, że pewne eksperymenty można nazwać losowymi.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, grupy wzajemnie oceniają swoją pracę i pracę osoby „opowiadającej”.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa](#)

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny można wykorzystać na zajęciach dotyczących przestrzeni zdarzeń elementarnych – do określania liczby zdarzeń w opisanych doświadczeniach.