



Przekształcanie wyrażeń wymiernych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przekształcanie wyrażeń wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Za pomocą równości między wyrażeniami algebraicznymi możemy wyrażać związki między różnymi zmiennymi.

Postać takich równości przyjmują na przykład różne prawa fizyczne czy chemiczne.

W tej lekcji zajmiemy się przekształcaniem równości, w których występują ułamki algebraiczne.

Twoje cele

- Przekształcisz podane wzory do innej postaci, wykorzystując operacje na ułamkach algebraicznych.
- Zastotujesz wzory skróconego mnożenia.
- Przekształcając wzory wyznacysz z nich różne niewiadome.

Przeczytaj

W tej lekcji zajmiemy się przekształceniami równości zapisanych z użyciem ułamków algebraicznych.

Kilka pierwszych przykładów dotyczy równości $a = x + \frac{1}{x}$ rozważanej dla $x \neq 0$.

Przykład 1

Wiemy, że $a = x + \frac{1}{x}$.

Zapiszemy wyrażenie $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jako wyrażenie zawierające tylko zmienną a .

Rozwiązanie

Zauważmy, że $a^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

Zatem $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Przykład 2

Wiemy, że $a = x + \frac{1}{x}$.

Zapiszemy wyrażenie $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jako wyrażenie zawierające tylko zmienną a .

Rozwiązanie

Zastosujmy wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy:

$$\begin{aligned} a^3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \\ &= x^3 + 3 \cdot x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3a. \end{aligned}$$

Zatem $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$.

Przykład 3

Wiemy, że $a = x + \frac{1}{x}$.

Zapiszemy wyrażenie $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jako wyrażenie zawierające tylko zmienną a .

Rozwiązanie

Z przykładu 1 wiemy, że $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Podstawmy $t = x^2$ oraz $b = t + \frac{1}{t}$.

Wiemy, że $t^2 + \frac{1}{t^2} = b^2 - 2$.

Zatem

$$\begin{aligned}x^4 + \frac{1}{x^4} &= t^2 + \frac{1}{t^2} = b^2 - 2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = \\&= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 4 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2.\end{aligned}$$

Kolejny przykład jest trochę trudniejszy.

Przykład 4

Wiemy, że $a = x + \frac{1}{x}$.

Zapiszemy wyrażenie $\left|x - \frac{1}{x}\right|$ jako wyrażenie zawierające tylko zmienną a .

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$.

Zatem korzystając z przykładu 1 możemy zapisać $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 - 2 - 2 = a^2 - 4$.

Wiemy, że $\sqrt{t^2} = |t|$. Zatem

$$\left|x - \frac{1}{x}\right| = \sqrt{a^2 - 4}.$$

Można udowodnić (np. korzystając z nierówności Cauchy'ego między średnią arytmetyczną i geometryczną, co przekracza zakres bieżącej lekcji), że wyrażenie $x + \frac{1}{x}$ nigdy nie przyjmuje wartości z przedziału $(-2; 2)$, więc dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ występujący we wzorze pierwiastek zawsze istnieje.

Przykład 5

Wiemy, że dla $y \neq 1$ i $y \neq -1$: $c = \frac{1+y}{1-y} + \frac{1-y}{1+y}$.

Zapiszemy wyrażenie $\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$ za pomocą zmiennej c .

Rozwiązanie

Zapiszmy dwoma sposobami $c + 1$:

$$\begin{cases} c + 1 = \frac{1+y}{1-y} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1-y}{1-y} \\ c + 1 = \frac{1+y}{1-y} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1+y}{1+y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + 1 = \frac{2}{1-y} + \frac{1-y}{1+y} \\ c + 1 = \frac{1+y}{1-y} + \frac{2}{1+y} \end{cases}.$$

Po dodaniu obu równości stronami uzyskamy:

$$2c + 2 = \frac{2}{1-y} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1+y}{1-y} + \frac{2}{1+y}$$

$$2c + 2 = c + \frac{2}{1-y} + \frac{2}{1+y}$$

$$\frac{2}{1-y} + \frac{2}{1+y} = c + 2.$$

Zatem po podzieleniu przez 2:

$$\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{1}{2}c + 1.$$

Przykład 6

Dana jest zależność $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

Możemy określić jej dziedzinę: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$.

Wyznamy dziedzinę każdego z poniższych wyrażeń i wykażemy, że są one równoważne podanej zależności na częściach wspólnych swoich dziedzin.

$$5 = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

- Określmy dziedzinę:

$$\begin{aligned} & x \neq 0 \\ & \text{"{" } y \neq 0 \text{ "}, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq 0 \end{aligned}$$

czyli

$$\text{"</mo"}$$

- Przekształćmy równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ zapisując odwrotności wyrażeń po obu stronach. Uzyskamy $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 5$.
- Wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ oraz $5 = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ są zatem równoważne, gdy

$$\text{"</mo"}$$

$$5(x + y) = xy$$

- Po obu stronach równości mamy tylko mnożenie i dodawanie, więc jest określona gdy $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.
- Przekształćmy równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ wykonując dodawanie po lewej stronie:
$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{5}.$$

Po obustronnym przemnożeniu przez $5xy$ uzyskamy

$$5(x + y) = xy.$$

- Wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ oraz $5 = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ są zatem równoważne, gdy
””0) mtr.

$$\frac{xy}{x+y} = 5$$

- Określmy dziedzinę:

Wyrażenie w mianowniku nie może być zerem, więc

””0) mtr mtr.

- Przekształćmy równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ wykonując dodawanie po lewej stronie:

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{5}.$$

Zapisując odwrotności obu stron uzyskanej równości uzyskamy wyrażenie

$$\frac{xy}{x+y} = 5.$$

- Z tego wynika, że wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ oraz $\frac{xy}{x+y} = 5$ są równoważne, gdy
””0) mtr mtr.

$$x = \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{y}}$$

- Określmy dziedzinę:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \neq 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{y} \neq 0 \end{array} \right.$$

czyli

””0; 5).

- Przekształćmy równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ przenosząc $\frac{1}{y}$ na drugą stronę:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{y}$$

Zapiszmy teraz odwrotności wyrażeń po obu stronach:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{y}}.$$

- Wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ i $x = \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{y}}$ są zatem równoważne, gdy
””0) mtr.

$$y = \frac{5x}{x-5}$$

- Określmy dziedzinę:

””5) mtr.

- Przekształćmy równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ przenosząc $\frac{1}{x}$ na drugą stronę:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}.$$
Wykonajmy odejmowanie:

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{5x} - \frac{5}{5x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x-5}{5x}$$
Zastąpmy równość wyrażeń po obu stronach równością ich odwrotności:

$$y = \frac{5x}{x-5}.$$
- Wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ i $y = \frac{5x}{x-5}$ są więc równoważne, gdy $x \neq 0; 5$) **mtu**.

Słownik

dziedzina wyrażenia algebraicznego

wyznaczenie dziedziny to określenie dla każdej zmiennej występującej w wyrażeniu warunków, po których spełnieniu wyrażenie przyjmuje jakąś wartość

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną pokazującą, jak przekształcać równości zawierające ułamki algebraiczne tak, by wyznaczyć jedną z występującą w nich niewiadomych za pomocą pozostałych niewiadomych. Jest to stosowana czasem w fizyce metoda z trójkątem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2yqc7X9r>

Polecenie 2

Wyznacz niewiadomą D ze wzoru $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Polecenie 3

Wyznacz niewiadomą D ze wzoru $A = \frac{B-D}{C}$.

Polecenie 4

Wyznacz niewiadomą D ze wzoru $\frac{A}{C-D} = \frac{1}{B}$.

Polecenie 5

Wyznacz niewiadomą D ze wzoru $A = \frac{B}{\frac{1}{C} + \frac{1}{D}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz y z wyrażenia $x = \frac{1}{y}$.

$y =$

Ćwiczenie 2



Wyznacz y z wyrażenia $\frac{y+1}{x} = x - 1$

$y =$

Ćwiczenie 3



Wyznacz x z wyrażenia $\frac{y}{x+1} = 3$.

$x =$

Ćwiczenie 4



Wyznacz x z wyrażenia $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$.

$x =$

Ćwiczenie 5



Wyznacz s z wyrażenia $\frac{3}{t^2} - 2s = t$.

$s =$

☐ $\frac{3t-t^2}{2t^2}$

☐ $\frac{3+t^2}{2t}$

☐ $\frac{3-t^3}{2t^2}$

☐ $\frac{3+t}{2t^2}$

Ćwiczenie 6



Wyznacz b z wyrażenia $\frac{1}{b-3} = a + 1$.

$b =$

☐ $\frac{3a+3}{a+1}$

☐ $\frac{3a+4}{a+1}$

☐ $\frac{3a-4}{a+1}$

☐ $\frac{4-3a}{a+1}$

Ćwiczenie 7



Wskaż wszystkie wyrażenia równoważne wyrażeniu $ad = bc$ przy założeniu, że $a, b, c, d \neq 0$

☐ $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$

☐ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

☐ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

☐ $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$

Ćwiczenie 8



Wiadomo, że $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = p$.

Wyraż wyrażenie $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ używając parametru p .

☐ $\frac{1}{2}p^2 + 1$

☐ $\frac{1}{2}p^2 - 1$

☐ $p^2 + 2$

☐ $2p$

☐ $p^2 - 2$

☐ p^2

☐ $2p^2$

Ćwiczenie 9



Dane jest wyrażenie $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0$.

Zatem

$a = \boxed{}$

$b = \boxed{}$

$c = \boxed{}$

$\frac{bc}{c+3b}$

$-\frac{bc}{2c+3b}$

$\frac{2ac}{2c+3a}$

$\frac{ab}{b+2a}$

$-\frac{2ac}{c+3a}$

$-\frac{3ab}{b+2a}$

Ćwiczenie 10



Połącz w pary wyrażenia równoważne na częściach wspólnych swoich dziedzin.

$$\frac{2x-1}{y+2} = 3$$

$$y = \frac{1-4x}{2x}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{y} = 1$$

$$y = \frac{2x-7}{3}$$

$$\frac{x+3}{y-1} = x$$

$$y = \frac{2x+3}{x}$$

$$\frac{3}{y+2} = 6x$$

$$y = \frac{3x+3}{1-x}$$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca podane wzory do innej postaci, wykorzystując operacje na ułamkach algebraicznych.
- przekształca wyrażenia wymierne przy pomocy wzorów skróconego mnożenia.
- wyznacza wskazane niewiadome ze wzorów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Pracując w parach, uczniowie analizują się przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz w medium bazowym. Porównują swoje notatki, dyskutują nad wątpliwościami.
2. Konsultując z nauczycielem, uczniowie wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3 osobowe. Każdy uczestnik grupy otrzymuje inne zadania do rozwiązania (wybrane z ćwiczeń 1–8).
4. Po rozwiązaniu zadania uczniowie spotykają się w grupach, które rozwiązywały to samo zadanie. Omawiają rozwiązania, wyjaśniają wątpliwości.
5. Następnie wracają do początkowych grup i przedstawiają rozwiązania innym członkom grupy.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń i wyjaśnia wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują pozostałe ćwiczenia.

Materiały pomocnicze:

[Przekształcanie wyrażeń algebraicznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać prezentację multimedialną jako pomoc przy pracy w grupach na lekcji oraz do utrwalenia informacji w domu.