



Ciąg geometryczny określony rekurencyjnie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ciąg geometryczny określony rekurencyjnie

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, na opakowaniu gorącej czekolady, holenderskiej marki Droste, zamieszczono wizerunek pielęgniarki niosącej tacę z filiżanką i pudełkiem kakao, tejże marki.

Powstał w ten sposób rodzaj rekurencyjnego obrazu, nazwany efektem Droste.

Obraz utworzony według efektu Droste zawiera mniejszą wersję samego siebie. Ta mniejsza wersja może zawierać jeszcze mniejszą wersję w tym samym miejscu, i tak dalej. Taka procedura może się powtarzać w nieskończoność.

W klasycznym modelu Droste wymiary poszczególnych obrazów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie mniejszym od 1, określony w sposób rekurencyjny.



Pudełko kakao Droste

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Rekurencyjne określenie ciągu geometrycznego, będzie tematyką tych materiałów. Jeśli masz artystyczną duszę, może zainspirowany treściami zawartymi w tym materiale, wymyślisz nowy, oryginalny sposób graficznego obrazowania rekurencji.

Twoje cele

- Określisz ciąg geometryczny w sposób rekurencyjny.
- Na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu geometrycznego, wyznaczysz własności tego ciągu.

Przeczytaj

Rekurencja, zwana również rekursją (łac. recurrere – przybiec z powrotem), to jedna z najważniejszych metod informatycznych konstruowania rozwiązań i algorytmów. Algorytm rekurencyjny to taki, który korzysta z samego siebie. Podobnie – istotą definicji rekurencyjnej jest odwoływanie się do samej siebie. W takiej definicji ciągu w wyrażeniu definiującym, obok symbolu zmiennej n występuje symbol definiowanego ciągu. Zatem wyraz ciągu zależy nie tylko od zmiennej n , ale też od jednego lub kilku wyrazów poprzednich.

Definicja: Definicja rekurencyjna ciągu

Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu.

Wzór definiujący ciąg w taki sposób, nazywamy **zależnością rekurencyjną**.

Aby zapisać zależność rekurencyjną dla ciągu geometrycznego (co najmniej trzywyrazowego), ustalamy najpierw pewną liczbę a (pierwszy wyraz ciągu) i liczbę q (iloraz ciągu).

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

gdzie:

a – pierwszy wyraz ciągu,

q – iloraz ciągu,

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Przykład 1

Zapiszemy **wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego** siedmiowyrazowego (a_n) o wyrazach:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16.$$

Odczytujemy pierwszy oraz drugi wyraz ciągu i określamy iloraz ciągu.

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$$

Zapisujemy wzór

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Przykład 2

Ciąg geometryczny (b_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = \sqrt{2} \cdot b_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

Znajdziemy wzór ogólny tego ciągu.

1 sposób:

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$$-3, -3\sqrt{2}, -6, -6\sqrt{2}, -12, \dots$$

Wnioskujemy, że pierwszy wyraz ciągu to $b_1 = -3$, natomiast iloraz ciągu to $q = \frac{-3\sqrt{2}}{-3} = \sqrt{2}$.

Zapisujemy wzór ogólny:

$$b_n = -3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} \text{ dla } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

2 sposób:

Na podstawie wzoru rekurencyjnego ustalamy i przekształcamy wyraz b_n „cofając się” aż do wyrazu b_1 tak, aby uzyskać postać

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = \sqrt{2}b_{n-1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}b_{n-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot b_{n-3} = \dots$$

$$b_n = (\sqrt{2})^1 \cdot b_{n-1} = (\sqrt{2})^2 \cdot b_{n-2} = (\sqrt{2})^3 \cdot b_{n-3} = \dots$$

Zauważmy, że suma numeru danego wyrazu i wykładnika potęgi $\sqrt{2}$ jest równa n . Zatem:

$$b_n = (\sqrt{2})^1 \cdot b_{n-1} = (\sqrt{2})^2 \cdot b_{n-2} = (\sqrt{2})^3 \cdot b_{n-3} = \dots = (\sqrt{2})^{n-1} \cdot b_1 = -3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

Odpowiedź:

Wzór ogólny ciągu: $b_n = -3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Na podstawie wzoru rekurencyjnego możemy znaleźć dowolny wyraz ciągu, ale procedura jest wtedy znacznie dłuższa, niż przy wykorzystaniu wzoru ogólnego. Gdyż, aby wyznaczyć wyraz k -ty, musimy znać wszystkie wyrazy o numerach mniejszych od k .

Przykład 3

Znajdziemy piąty wyraz ciągu geometrycznego (c_n) określonego wzorem

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = 3 \cdot c_n \end{cases}, \text{ gdzie: } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu, aż do c_5 .

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$c_3 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$c_4 = 9 \cdot 3 = 27$$

$$c_5 = 27 \cdot 3 = 81$$

Odpowiedź:

Piąty wyraz ciągu jest równy 81.

Wzór rekurencyjny ciągu możemy zapisać również w przypadku, gdy znamy co najmniej dwa wyrazy ciągu geometrycznego lub zależności łączące wyrazy ciągu.

Przykład 4

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 420 \\ a_4 + a_7 = 280 \end{cases}.$$

Wyznamy wzór rekurencyjny tego ciągu.

Aby zapisać wzór rekurencyjny, na podstawie podanego układu równań, będziemy musieli znaleźć pierwszy wyraz ciągu i iloraz ciągu q .

Zauważmy, że $a_4 = a_3 \cdot q$ i $a_7 = a_6 \cdot q$.

Układ równań zapisany w treści zadania przyjmuje więc postać:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 420 \\ a_3 \cdot q + a_6 \cdot q = 280 \end{cases}$$

Po lewej stronie drugiego równania wyłączamy q przed nawias.

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 420 \\ q(a_3 + a_6) = 280 \end{cases}$$

Na podstawie treści zadania wnioskujemy, że zarówno wyrazy ciągu, jak i iloraz są różne od zera. Możemy więc podzielić drugie równanie przez pierwsze – otrzymujemy iloraz ciągu.

$$q = \frac{280}{420} = \frac{2}{3}$$

Zapisujemy wyrazy pierwszego równania za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu.

$$a_3 + a_6 = 420$$

$$a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^5 = 420$$

W miejsce q podstawiamy wyznaczoną liczbę.

$$a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 420$$

$$\frac{4}{9} \cdot a_1 + \frac{32}{243} \cdot a_1 = 420$$

Z otrzymanego równania wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$$\frac{140}{243} a_1 = 420$$

$$a_1 = 729$$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$$\begin{cases} a_1 = 729 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Na podstawie ciągu rekurencyjnego, możemy badać własności ciągu geometrycznego.

Przykład 5

Zbadamy monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) określonego wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4 \cdot a_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Obliczamy drugi wyraz ciągu i wyznaczymy iloraz ciągu.

$$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

$$q = 12 : 3 = 4$$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot 4^n$$

Badamy różnicę dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4} \cdot 4^{n+1} - \frac{3}{4} \cdot 4^n = \frac{9}{4} \cdot 4^n > 0$$

Różnica jest liczbą dodatnią. Wnioskujemy, że $a_{n+1} > a_n$, a to oznacza, że ciąg jest rosnący.

Odpowiedź:

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Słownik

wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego

wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

gdzie:

a – pierwszy wyraz ciągu,

q – iloraz ciągu,

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzTAHPMU1>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągu geometrycznego określonego rekurencyjnie.

Polecenie 2

Znajdź pięć początkowych wyrazów ciągu (b_n) .

$$\begin{cases} b_1 = -2 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg geometryczny (b_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} b_1 = -\sqrt{2} \\ b_{n+1} = -\sqrt{2} \cdot b_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Szósty wyraz ciągu to:

☐ $-8\sqrt{2}$

☐ $8\sqrt{2}$

☐ -8

☐ 8

Ćwiczenie 2



Zaznacz wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach: 512, 320, 200, 125, ...

☐ $\begin{cases} a_1 = \frac{5}{8} \\ a_{n+1} = 512 \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

☐ $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = 512 + \frac{5}{8} \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

☐ $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = \frac{5}{8} \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

☐ $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = \frac{8}{5} \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

Ćwiczenie 3



Ciąg $(16, x, 9)$ jest geometryczny o wyrazach dodatnich. Uzupełnij obliczenia prowadzące do wyznaczenia wzoru rekurencyjnego ciągu. Wpisz odpowiednie liczby.

Ciąg jest geometryczny, zatem

$$x^2 = \boxed{} \Rightarrow x = \boxed{} \text{ lub } x = \boxed{} - \text{nie spełnia}$$

warunków zadania

Wyznaczamy iloraz ciągu.

$$q = 12 : 16 = \boxed{} : \boxed{}$$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$$a_1 = \boxed{}$$

i

$$a_{n+1} = \left(\boxed{} : \boxed{} \right) \cdot a_n$$

Ćwiczenie 4



Długości a_1, a_2, a_3 krawędzi prostopadłościanu o objętości 64 tworzą ciąg geometryczny o ilorazie większym od 1. Suma długości tych krawędzi jest równa 21. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu i uzupełnij wzór rekurencyjny ciągu, utworzonego przez długości tych krawędzi. Przeciągnij odpowiednie liczby lub wyrażenia.

$a_1 =$ i $a_{n+1} =$, gdzie $n = 1, 2$.

Ćwiczenie 5



Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = -2a_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Różnica między trzecim a drugim wyrazem tego ciągu jest równa różnicy między czwartym a trzecim wyrazem tego ciągu.

☐

Iloraz tego ciągu jest liczbą ujemną.

☐

Wzór ogólny ciągu to $a_n = -5 \cdot (-2)^{n-1}$.

☐

Piąty wyraz tego ciągu jest liczbą dodatnią.

Ćwiczenie 6



Połącz w pary wyrazy ciągu geometrycznego i wzór ciągu zapisany w postaci rekurencyjnej.

$$-2, 10, -50, 250, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$$

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_n \end{cases}$$

$$\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = -5 \cdot a_n \end{cases}$$

$$64, 32, 16, 8, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 64 \\ a_{n+1} = 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

Ćwiczenie 7



Zapisz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich, określonego następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = m \\ \frac{a_{n+2}}{2} = 8a_n \end{cases}, \text{ gdzie } n = 2, 3, 4, \dots$$

Ćwiczenie 8



Suma trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 62. Różnica wyrazów trzeciego i drugiego jest pięć razy większa od różnicy wyrazów drugiego i pierwszego. Zapisz wzór rekurencyjny tego ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg geometryczny określony rekurencyjnie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie;
- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa ciąg geometryczny w sposób rekurencyjny
- na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu geometrycznego, wyznacza własności tego ciągu
- buduje proste algorytmy rekurencyjne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika porównań binarnych
- koszyk pomysłów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą koszyka pomysłów przygotowują kartki, na których zapisują związane z ciągiem geometrycznym poznane twierdzenia, wzory, przykłady rozwiązanych zadań, definicje, itp. Kartki wrzucają do kosza, z którego będzie można je pobierać, szukając inspiracji do rozwiązania zadań. Uczniowie na tym etapie powtarzania wiadomości mogą korzystać z zeszytów, komputera, książek. Powinna to być praca indywidualna – każdy uczeń przygotowuje w ten sposób co najmniej 5 karteczek.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Ich zadaniem jest samodzielne rozwiązanie przykładów przedstawionych w sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie czytają dane polecenie, próbują rozwiązać problem. W razie wątpliwości mogą zajrzeć do kosza pomysłów i odnaleźć potrzebne twierdzenie lub rozwiązanie zadania podobnego typu. Swoje rozwiązania porównują z tymi, zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Technika porównań binarnych sporządza do każdego zadania tabelę porównawczą, w której zapisują plusy lub minusy danego sposobu rozwiązania.
2. Po zakończonej pracy uczniowie prezentują swoje tabele, jak również przedstawiają oryginalne rozwiązania, czy pomysły.
3. Dyskusja – czy można wypracować ramowy szablon rozwiązywania zadań, w których ciąg geometryczny zdefiniowany jest rekurencyjnie.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę par.
3. Karteczki znajdujące się w „koszu pomysłów” warto zachować, gdyż mogą być w przydatne na następnych zajęciach poświęconych ciągowi geometrycznemu.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest zapoznanie się z filmem samouczkiem i korzystając, z podanych tam wzorów, rozwiązanie zadań interaktywnych zawartych w sekcji „Sprawdź się”.
2. Dla chętnych:
Poszukanie przykładów wykorzystania efektu Droste np. w architekturze, malarstwie i przygotowanie na następną lekcję mini – prezentacji na ten temat.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg geometryczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany na lekcjach wprowadzających pojęcie rekurencji.