# Graniastosłup - zadania z kontekstem realistycznym

# Graniastosłup - zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: Lance Anderson, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Graniastosłupy są jednymi z częściej wykorzystywanych brył w życiu codziennym. Ich regularne kształty, w szczególności prostopadłościanu i graniastosłupów prawidłowych, są łatwe do odtworzenia i bardzo funkcjonalne, co stanowi inspirację dla architektów, konstruktorów i wytwórców. Trudno sobie wyobrazić jakiekolwiek miasto lub mieszkanie, w którym nie znajdowałyby się graniastosłupy: ich kształty znajdziemy w bryłach budowli, mebli, pudełek i wielu innych przedmiotach codziennego użytku. Z własności brył, które poznajecie na lekcjach matematyki korzystamy w życiu codziennym w sposób intuicyjny. Poniżej pokażemy Wam w jakich (między innymi) sytuacjach codziennych korzystamy z własności graniastosłupów – czasem zupełnie nieświadomie.

**Twoje cele**

- Rozpoznasz graniastosłupy w przedmiotach codziennego użytku.
- Obliczysz pole powierzchni i objętość graniastosłupów z zastosowaniem twierdzeń dotyczących trójkątów.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny przy rozwiązywaniu zadań praktycznych.
- Wykorzystasz własności kątów, odcinków i wielokątów do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupa.

# Przeczytaj

## Graniastosłupy prawidłowe

Potrafisz już obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupów prawidłowych.

Przypomnijmy wzory dla podstawowych graniastosłupów prawidłowych:

- graniastosłup prawidłowy trójkątny:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H$$

- graniastosłup prawidłowy czworokątny:

$$V = a^2 \cdot H$$

$$P_c = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot H$$

- sześcian (szczególny przypadek graniastosłupa prawidłowego czworokątnego):

$$V = a^3$$

$$P_c = 6 \cdot a^2$$

- graniastosłup prawidłowy sześciokątny:

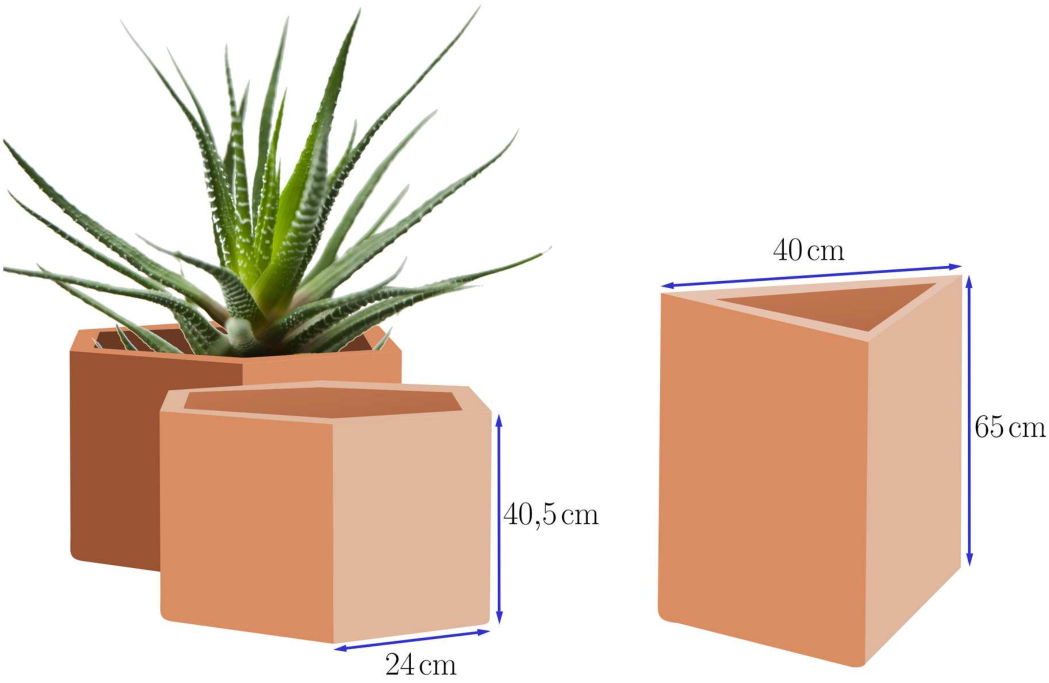
$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$P_c = 12 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot H$$

**Przykład 1**

Pan Nowak ma w ogrodzie trzy donice: dwie w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wymiarach wewnętrznych: krawędzi podstawy $24\ \text{cm}$ i wysokości $40,5\ \text{cm}$ oraz donicę w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wymiarach wewnętrznych: krawędzi podstawy $40\ \text{cm}$ i wysokości $65\ \text{cm}$. Sprawdzimy, czy trzy opakowania ziemi po 50 l wystarczą, aby napełnić te donice.

**Rozwiązanie**




Musimy obliczyć objętość donic. Korzystając ze wzoru

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

obliczymy objętość donicy o podstawie trójkąta.

Ponieważ pojemność opakowań z ziemią dana jest w litrach, to zamieniamy jednostki na dm.

Mamy zatem $a = 4 \text{ dm}$ i $H = 6,5 \text{ dm}$.

Czyli $V = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 6,5 = 26\sqrt{3} \approx 45$ [l].

Teraz policzymy objętość donic w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ze wzoru:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Mamy zatem:

$$2 \cdot V = 12 \cdot \frac{2,4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4,05 = 69,984\sqrt{3} \approx 121,22 \text{ [l]}$$

Razem mamy około $45 + 121,22 = 166,22$ [l].

A zatem trzy opakowania ziemi po 50 l nie wystarczą do napełnienia tych donic.

**Przykład 2**

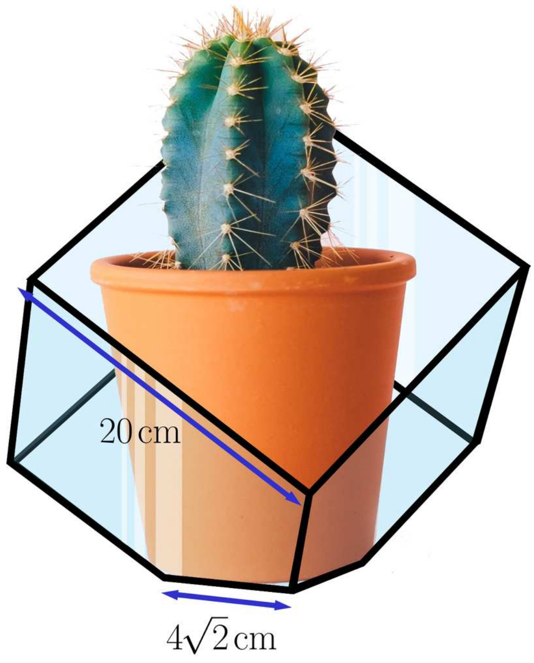
Szklane terrarium ma kształt sześcianu o krawędzi $20\ \mathrm{cm}$ z odciętym rogiem, w taki sposób, że z każdej z trzech ścian odcięto trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $4\ \mathrm{cm}$. Obliczymy, ile szkła potrzeba, aby wykonać takie terrarium. Wynik podamy z dokładnością do $0,1\ \mathrm{m}^2$.

**Rozwiązanie**

Ponieważ z trzech ścian wychodzących z jednego wierzchołka odcięto trójkąt równoramienny prostokątny, to powstanie ściana w kształcie trójkąta równobocznego o krawędzi $4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$.

Pole tej ściany wynosi:

$$P = \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \approx 13,86\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$




Pole powierzchni odciętych trójkątów to:

$$P_o = 3 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 24\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$

Pole sześcianu (bez jednej ściany), to

$$P_{sz} = 5 \cdot 20 \cdot 20 = 2000\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$

Ostatecznie do wykonania terrarium potrzebujemy

$$P_T \approx 2000 - 24 + 13,86 = 1989,86\ \left[\mathrm{cm}^2\right] \approx 0,2\ \left[\mathrm{m}^2\right]$$ szkła.

## Inne graniastosłupy

Regularne kształty graniastosłupów prawidłowych są bardzo funkcjonalne, jednak w otaczającej nas rzeczywistości możemy spotkać również inne graniastosłupy proste, a bywa również, że i pochyłe.

Przypomnijmy, że objętość graniastosłupa możemy policzyć ze wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie:
$P_p$ – to pole podstawy liczone ze wzoru właściwego dla danego wielokąta,
$H$ – to wysokość graniastosłupa, która w przypadku graniastosłupa prostego jest równa długości krawędzi bocznej.

Pole powierzchni graniastosłupa policzymy ze wzoru:

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

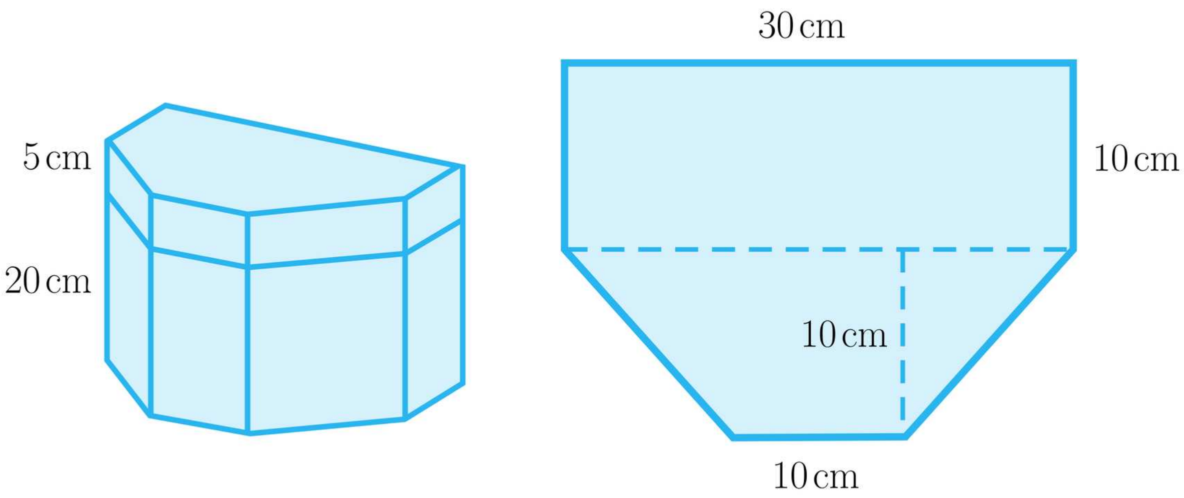
gdzie:
$P_b$ – jest polem powierzchni bocznej będącego sumą pól poszczególnych ścian bocznych (w przypadku graniastosłupa prostego są to pola prostokątów o bokach będących odpowiednimi krawędziami podstawy i krawędzią boczną, w przypadku graniastosłupa pochyłego są to pola równoległoboków będących ścianami bocznymi).
Przypomnijmy, że aby policzyć pole powierzchni bocznej graniastosłupa prostego wystarczy pomnożyć obwód wielokąta w podstawie przez wysokość graniastosłupa.

W przypadkach rzeczywistych szczególną uwagę należy zwrócić na zagadnienia dotyczące obliczania pól, ponieważ bardzo często niektóre ściany graniastosłupa są pomijane – tak jest na przykład w zadaniach, w których budujemy pudełka bez wieczka, akwaria, wazony lub malujemy pomieszczenia.

**Przykład 3**

Kasia chce podarować swojej mamie drewnianą szkatułkę przyozdobioną techniką decoupage tzn. całą powierzchnię zewnętrzną szkatułki poza spodem chce okleić serwetkami papierowymi z motywami ozdobnymi. Szkatułka ma kształt graniastosłupa prostego sześciokątnego o podstawie jak na rysunku. Kasia wykorzystuje serwetki o wymiarach $33\text{ cm} \times 33\text{ cm}$. Obliczymy, ile serwetek użyje Kasia, jeżeli do powierzchni ozdabianego przedmiotu należy doliczyć około $10\%$.

**Rozwiązanie**




Sześciokąt w podstawie można podzielić na prostokąt i trapez równoramienny.

Mamy wtedy:

$P_p = P_{pros} + P_{tr}$

Czyli $P_p = 30 \cdot 10 + \frac{(30+10) \cdot 10}{2} = 300 + 200 = 500 \ [\mathrm{cm}^2]$.

Do obliczenia pola bocznego potrzebujemy jeszcze długości ramienia trapezu. Z danych na rysunku wynika, że będzie to przeciwprostokątna równoramiennego trójkąta prostokątnego i będzie mieć długość $10\sqrt{2}$ cm.

Szkatułka razem z wieczkiem ma wysokość $25$ cm.

Czyli $P_b = 25 \cdot \left(3 \cdot 10 + 2 \cdot 10\sqrt{2} + 30\right) \approx 2207 \ [\mathrm{cm}^2]$.

A zatem powierzchnia do oklejenia (bez spodu) będzie wynosić w przybliżeniu

$500 + 2207 = 2707 \ [\mathrm{cm}^2]$

Należy doliczyć do tego jeszcze $10\%$:

$2707 + 270,7 = 2977,7 \ [\mathrm{cm}^2]$

Powierzchnia jednej serwetki to $33 \cdot 33 = 1089 \ [\mathrm{cm}^2]$.

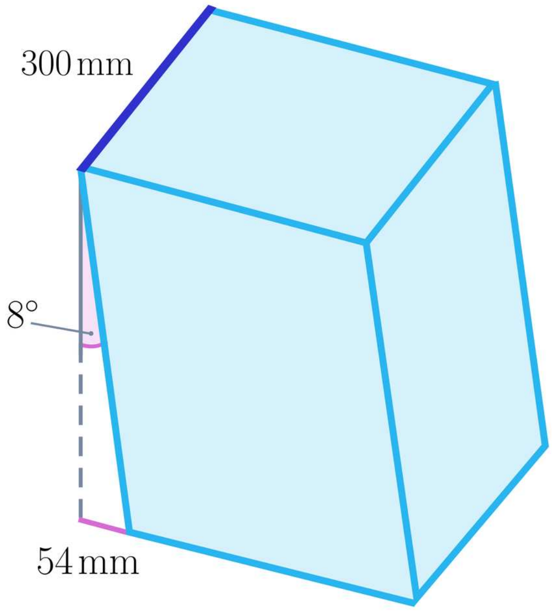
Mamy $2977,7 : 1089 \approx 2,73$.

Czyli Kasia zużyje trzy serwetki do oklejenia szkatułki.

**Przykład 4**

Betonowy słupek parkingowy ma kształt graniastosłupa pochyłego, którego podstawą jest kwadrat. Dwie ze ścian, które nie są prostokątami, są prostopadłe do podstawy. Kąt nachylenia wysokości słupka do ściany bocznej będącej prostokątem wynosi $8^\circ$. Wykorzystując dane na rysunku obliczymy jaka jest masa takiego słupka, jeżeli gęstość betonu, z którego został wykonany wynosi $2222\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

**Rozwiązanie**




Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$\operatorname{tg} 8^\circ = \frac{54}{H}$

Czyli $0,1405 = \frac{54}{H}$, a stąd ostatecznie $H \approx 384\ [\mathrm{mm}]$.

Obliczymy objętość słupka i wyrazimy ją w $\mathrm{m}^3$.

Mamy

$V = 300^2 \cdot 384 = 34560000\ [\mathrm{mm}^3] = 34560\ [\mathrm{cm}^3] = 0,03456\ [\mathrm{m}^3]$

Korzystamy ze wzoru na gęstość: $\rho = \frac{m}{V}$.

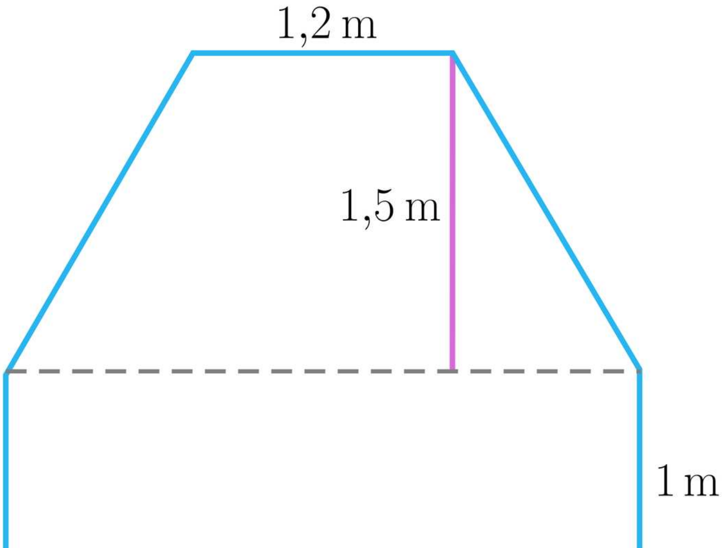
Czyli $2222 = \frac{m}{0{,}03456}$, a stąd ostatecznie masa słupka wynosi $m \approx 76,79\ [\mathrm{kg}]$.

**Przykład 5**

Pokój Maćka wygląda jak na rysunku.

Źródło: dostępny w internecie: www.unsplash.com, licencja: CC BY 3.0.

Latem jest tam bardzo gorąco, więc Maciek planuje kupić klimatyzator. Moc klimatyzatora wylicza się mnożąc objętość pomieszczenia wyrażoną w metrach sześciennych przez współczynnik $40\ \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$, gdzie $W$, to jednostka mocy. Policzymy moc klimatyzatora potrzebnego Maćkowi, wiedząc że długość pokoju to $5\ \text{m}$ a wymiary przedstawionej na rysunku ściany są następujące.




**Rozwiązanie**

Zauważ, że na pokój Maćka możemy spojrzeć jak na graniastosłup prosty, którego podstawą jest ściana przedstawiona na rysunku wyżej a wysokość $H = 5 \text{ m}$. Aby obliczyć objętość pokoju musimy policzyć pole sześciokąta z rysunku. Zauważmy, że jest to trapez i prostokąt, więc

$P = 3 \cdot 1 + \frac{4{,}2 \cdot 1{,}5}{2} = 6,15$

Zatem objętość pokoju Maćka to $30,75 \left[\text{m}^3\right]$.

Moc klimatyzatora, którego potrzebuje Maciek to

$30,75 \text{ m}^3 \cdot 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^3} = 1230 \text{ W} = 1,23 \text{ kW}$

## Słownik

**graniastosłup prosty**

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami

**graniastosłup prawidłowy**

graniastosłup prosty, w którego podstawie jest wielokąt foremny

**wysokość graniastosłupa**

odcinek, którego długość jest równa odległości między płaszczyznami różnych podstaw graniastosłupa

# Film samouczek

**Polecenie 1**

Zastanów się jaki kształt ma zwykle klin używany m.in. do blokowania drzwi i sztabka złota. Zapoznaj się z treścią filmu, aby uzyskać odpowiedź.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dd4Yp1HdF

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego graniastosłupa- zadania z kontekstem realistycznym.

---

**Polecenie 2**

Sprawdź, czy sztabka złota, która pojawia się w filmie zmieści się w niewielkim sejfie w kształcie prostopadłościanu o krawędziach podstawy $11 \text{ cm}$ i $4 \text{ cm}$ oraz pojemności $242 \text{ cm}^3$.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

W paczkomacie można nadać paczki: o gabarycie A (maksymalne wymiary $8 \times 38 \times 64 \text{ cm}$, masa do $25 \text{ kg}$), cena takiej paczki, to $11,30$ zł, o gabarycie B (maksymalne wymiary $19 \times 38 \times 64 \text{ cm}$, masa do $25 \text{ kg}$), cena takiej paczki, to $12,29$ zł i o gabarycie C (maksymalne wymiary $41 \times 38 \times 64 \text{ cm}$, masa do $25 \text{ kg}$), cena takiej paczki, to $14,75$ zł. Nauczycielka matematyki chce zamówić podręczniki dla $87$ uczniów. Wymiary podręcznika to $25 \times 17,5 \times 1,5$ a jego waga to $0,56 \text{ kg}$. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Najtańsza możliwa wysyłka będzie kosztować $24,58$ zł.
- [ ] Najtańsza możliwa wysyłka będzie kosztować $35,88$ zł.
- [ ] W kartonie o wymiarze $19 \times 38 \times 64 \text{ cm}$ zmieszczą się $73$ podręczniki.
- [ ] Najtańsza możliwa wysyłka będzie kosztować $14,75$ zł.
- [ ] W kartonie o wymiarze $19 \times 38 \times 64 \text{ cm}$ zmieszczą się $64$ podręczniki.

## Ćwiczenie 2

Podium składa się z trzech prostopadłościennych części o wymiarach: $100 \times 100 \times 50$, $90 \times 90 \times 40$ i $80 \times 80 \times 30$ (w $\mathrm{cm}$). Przystępując do dekoracji zwycięzców ustawiamy je w klasyczny sposób dbając o to, żeby ściany z numerem miejsca znajdowały się w jednej płaszczyźnie oraz żeby pomiędzy kolejnymi prostopadłościanami nie było przerw. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

- [ ] Otrzymana bryła jest graniastosłupem prawidłowym ośmiokątnym.
- [ ] Pole widocznej części podium to $93000\ \mathrm{cm}^2$.
- [ ] Pole widocznej części podium to $6250\ \mathrm{cm}^2$.
- [ ] Otrzymana bryła nie jest graniastosłupem, gdyż nie wszystkie wierzchołki są położone w dwóch równoległych płaszczyznach
- [ ] Pole widocznej części podium to $56500\ \mathrm{cm}^2$.

## Ćwiczenie 3

Uzupełnij luki jedną spośród wybranych liczb:

Pani Krystyna miała wazon w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Na wyprzedaży kupiła drugi z tej samej kolekcji, o tym samym kształcie, ale dwukrotnie krótszych krawędziach podstawy i wysokości. Do nowego wazonu zmieści się ______ razy mniej wody.

Piotr ma akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$. Wlewa do niego $16 \text{ l}$ wody. Woda dosięgnie do wysokości ______ $\text{cm}$.

Kasia pakuje prezenty świąteczne w prostopadłościenne pudełka i owija je ozdobnym papierem. Pudełko na prezent dla babci ma wszystkie krawędzie dwukrotnie dłuższe niż na prezent dla mamy. Na zakładki przeznaczamy $10\%$ powierzchni pudełka. Do zapakowania prezentu babci Kasia potrzebuje ______ razy więcej papieru niż dla mamy.

Wazon i szklanka mają kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o tej samej podstawie. Wysokość do jakiej napełnia się wazon jest dwukrotnie większa od wysokości do jakiej napełniamy szklankę. Do wazonu wlejemy ______ szklanki wody.

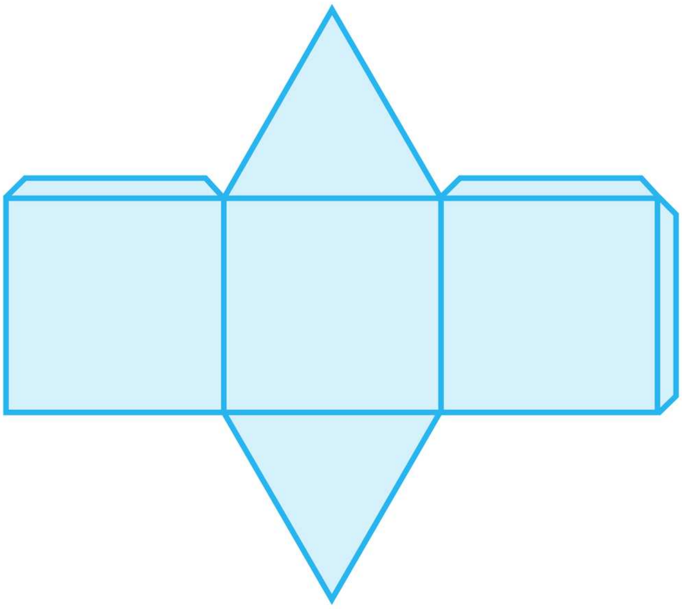
$10$ $2$ $8$ $14$ $4$ $3$ $1$ $16$ $6$

## Ćwiczenie 4

Firma “FIRE” produkująca świece ozdobne kupiła pewną ilość wosku. Będzie sprzedawać świece w cenie $6$ zł za sztukę. Który model świec w kształcie graniastosłupa prawidłowego powinna wybrać, aby przychód ze sprzedaży świec był największy?

## Ćwiczenie 5

Zosia chce wykonać pudełko z wiekiem w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy i wysokości równej $18 \text{ cm}$ z siatki, której szkic znajduje się poniżej.



Dodatkowo Zosia chce, aby odcinek o długości równej sumie trzech boków kwadratu był równoległy do krawędzi kartki. Zosia uwzględnia trzy zakładki w kształcie trapezu równoramiennego o podstawach $18 \text{ cm}$ i $16 \text{ cm}$ i wysokości $1 \text{ cm}$. Rozważa zakup jednego z poniższych formatów papieru:

**A2**: $420 \text{ mm} \times 594 \text{ mm}$;
**B2**: $500 \text{ mm} \times 707 \text{ mm}$;
**C2**: $458 \text{ mm} \times 648 \text{ mm}$.

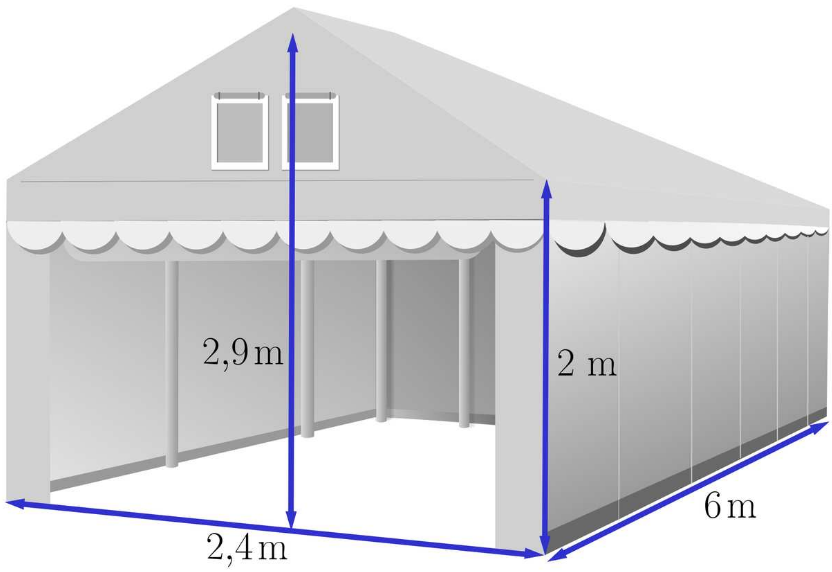
Doradź Zosi, który arkusz powinna kupić.

## Ćwiczenie 6

Trampolina ogrodowa ma kształt graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego. Wysokość siatki wynosi $240 \text{ cm}$, a najdłuższa przekątna podstawy ma długość $320 \text{ cm}$. Ile zapłacimy za zakup nowej siatki zewnętrznej na tę trampolinę, jeżeli metr bieżący siatki o wysokości $240 \text{ cm}$ kosztuje $20$ zł?

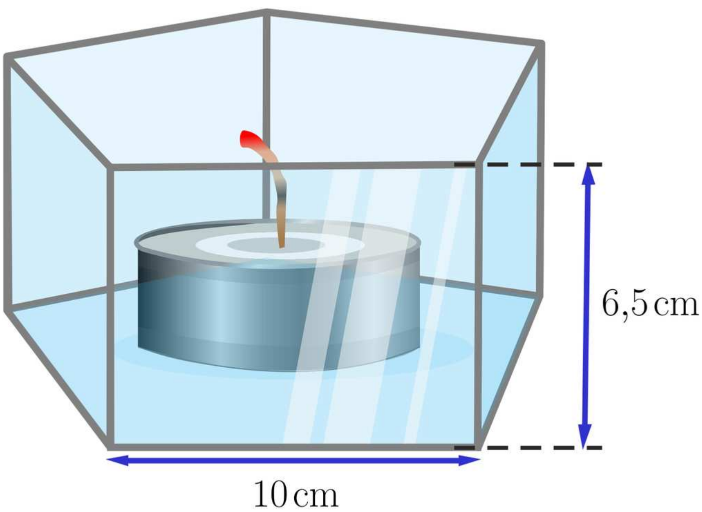
## Ćwiczenie 7

Pan Kowalski ma namiot bez podłogi w kształcie graniastosłupa prostego pięciokątnego o wymiarach jak na rysunku. Wejście namiotu jest zamykane rozwijaną plandeką. Pan Kowalski chciałby go umyć w myjni PCV. Koszt mycia to $2$ zł za $\mathrm{m}^2$, przy czym pole mytej powierzchni przybliża się z nadmiarem do pełnych metrów kwadratowych. Do powierzchni namiotu dodajemy $5\%$ na zakładki i falbanki. Ile pan Nowak zapłaci za mycie namiotu?




## Ćwiczenie 8

Jaką powierzchnię ma szkło potrzebne do wyprodukowania świecznika w kształcie graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego o krawędzi podstawy $10 \ \mathrm{cm}$ i wysokości $6,5 \ \mathrm{cm}$ , jak na rysunku?



# Dla nauczyciela

**Autor:** Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Graniastosłupy – zadania z kontekstem realistycznym**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje graniastosłupy w przedmiotach codziennego użytku
- oblicza objętość i pole powierzchni graniastosłupów z zastosowaniem twierdzeń dotyczących trójkątów
- dobiera odpowiedni model matematyczny przy rozwiązywaniu zadań praktycznych
- wykorzystuje własności kątów, odcinków i wielokątów do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupa.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja

**Formy pracy:**

- praca całą klasą
- praca w grupach

**Środki dydaktyczne:**

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e–podręczniku
- arkusze papieru i flamastry dla poszczególnych grup
- modele brył

**Przebieg lekcji:**

**Przed lekcją:**

- Przed lekcją nauczyciel zleca chętnemu uczniowi opracowanie prezentacji na temat wykorzystania graniastosłupów w architekturze.

**Faza wstępna:**

1. Uczeń prezentuje wykorzystanie graniastosłupów w architekturze.
2. Nauczyciel pyta uczniów o inne zastosowania graniastosłupów w życiu codziennym.
3. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom przykładowe zadania z sekcji „Przeczytaj" dotyczące zastosowań graniastosłupów.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 6 grup. Każda z grup rozwiązuje przykładowe zadania dotyczące graniastosłupów z podziałem na obliczanie pola i objętości.
3. Przedstawiciele grup przedstawiają swoje propozycje.
4. Uczniowie w tych samych grupach wykonują zadanie 2 z sekcji „Sprawdź się", następnie prezentują swoje rozwiązanie.
5. Nauczyciel przedstawia uczniom film dotyczący wykorzystania własności graniastosłupów w zadaniach z kontekstem realistycznym.
6. Uczniowie samodzielnie rozwiązują polecenia z sekcji Film i zadania zawarte w sekcji „Sprawdź się". Nauczyciel monitoruje pracę uczniów, udziela im wskazówek.

7. Nauczyciel prezentuje poprawne rozwiązania.

**Faza podsumowująca:**

1. Uczniowie rozwiązują zadanie 1 i zadanie 3 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczycielem prowadzi rozmowę podsumowującą na temat trudności związanych z omawianym tematem.

**Praca domowa:**

1. Zapoznać się ponownie z filmem.
2. Wykonać pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach
- Pole powierzchni graniastosłupa
- Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa

**Wskazówki metodyczne:**

Film można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Objętość graniastosłupa”.