



## Graniastosłup - zadania z kontekstem realistycznym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Graniastosłup - zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: Lance Anderson, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Graniastosłupy są jednymi z częściej wykorzystywanych brył w życiu codziennym. Ich regularne kształty, w szczególności prostopadłościanu i graniastosłupów prawidłowych, są łatwe do odtworzenia i bardzo funkcjonalne, co stanowi inspirację dla architektów, konstruktorów i wytwórców. Trudno sobie wyobrazić jakiegokolwiek miasto lub mieszkanie, w którym nie znajdowałyby się graniastosłupy: ich kształty znajdziemy w bryłach budowli, mebli, pudełek i wielu innych przedmiotach codziennego użytku. Z własności brył, które poznajecie na lekcjach matematyki korzystamy w życiu codziennym w sposób intuicyjny. Poniżej pokażemy Wam w jakich (między innymi) sytuacjach codziennych korzystamy z własności graniastosłupów – czasem zupełnie nieświadomie.

### Twoje cele

- Rozpoznasz graniastosłupy w przedmiotach codziennego użytku.
- Obliczysz pole powierzchni i objętość graniastosłupów z zastosowaniem twierdzeń dotyczących trójkątów.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny przy rozwiązywaniu zadań praktycznych.
- Wykorzystasz własności kątów, odcinków i wielokątów do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupa.

# Przeczytaj

---

## Graniastosłupy prawidłowe

Potrafisz już obliczać pole powierzchni i objętość [graniastosłupów prawidłowych](#).

Przypomnijmy wzory dla podstawowych graniastosłupów prawidłowych:

- graniastosłup prawidłowy trójkątny:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H$$

- graniastosłup prawidłowy czworokątny:

$$V = a^2 \cdot H$$

$$P_c = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot H$$

- sześcian (szczególny przypadek graniastosłupa prawidłowego czworokątnego):

$$V = a^3$$

$$P_c = 6 \cdot a^2$$

- graniastosłup prawidłowy sześciokątny:

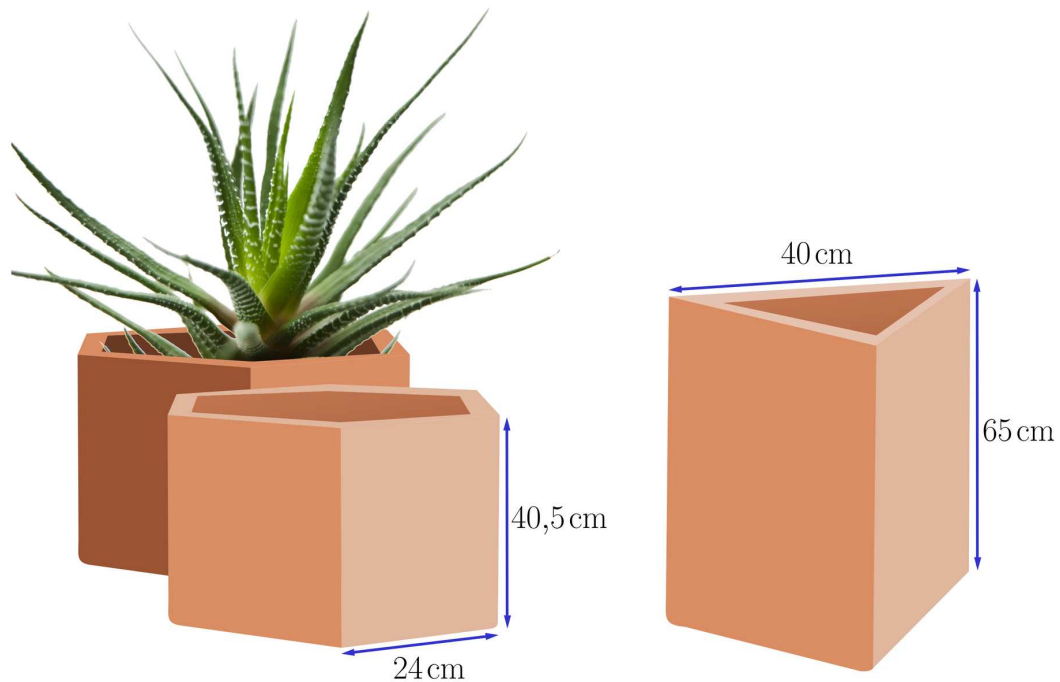
$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$P_c = 12 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot H$$

### Przykład 1

Pan Nowak ma w ogrodzie trzy donice: dwie w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wymiarach wewnętrznych: krawędzi podstawy 24 cm i wysokości 40, 5 cm oraz donicę w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wymiarach wewnętrznych: krawędzi podstawy 40 cm i wysokości 65 cm. Sprawdźmy, czy trzy opakowania ziemi po 50 l wystarczą, aby napełnić te donice.

### Rozwiązanie



Musimy obliczyć objętość donic. Korzystając ze wzoru

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

obliczymy objętość donicy o podstawie trójkąta.

Ponieważ pojemność opakowań z ziemią dana jest w litrach, to zamieniamy jednostki na dm.

Mamy zatem  $a = 4$  dm i  $H = 6,5$  dm.

$$\text{Czyli } V = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 6,5 = 26\sqrt{3} \approx 45 \text{ [l]}.$$

Teraz policzymy objętość donic w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ze wzoru:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Mamy zatem:

$$2 \cdot V = 12 \cdot \frac{2,4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4,05 = 69,984\sqrt{3} \approx 121,22 \text{ [l]}$$

Razem mamy około  $45 + 121,22 = 166,22$  [l].

A zatem trzy opakowania ziemi po 50 l nie wystarczą do napełnienia tych donic.

## Przykład 2

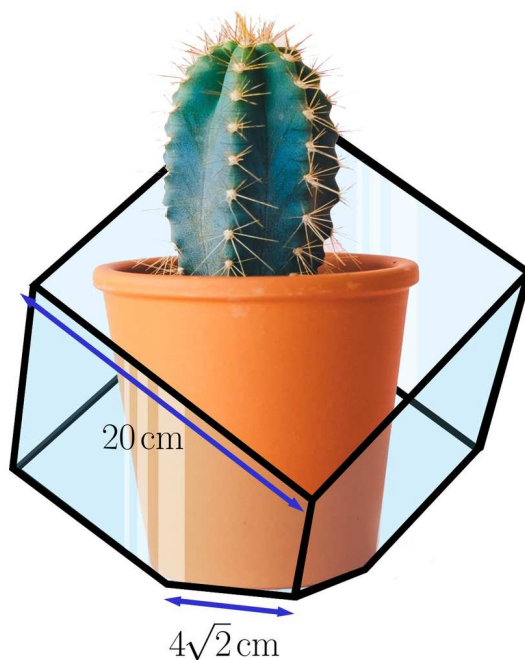
Szklane terrarium ma kształt sześcianu o krawędzi 20 cm z odciętym rogami, w taki sposób, że z każdej z trzech ścian odcięto trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm. Obliczmy, ile szkła potrzeba, aby wykonać takie terrarium. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 m<sup>2</sup>.

### Rozwiązanie

Ponieważ z trzech ścian wychodzących z jednego wierzchołka odcięto trójkąt równoramienny prostokątny, to powstanie ściana w kształcie trójkąta równobocznego o krawędzi  $4\sqrt{2}$  cm.

Pole tej ściany wynosi:

$$P = \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \approx 13,86 \text{ [cm}^2\text{]}$$



Pole powierzchni odciętych trójkątów to:

$$P_o = 3 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole sześcianu (bez jednej ściany), to

$$P_{sz} = 5 \cdot 20 \cdot 20 = 2000 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ostatecznie do wykonania terrarium potrzebujemy

$$P_T \approx 2000 - 24 + 13,86 = 1989,86 \text{ [cm}^2\text{]} \approx 0,2 \text{ [m}^2\text{]} \text{ szkła.}$$

## Inne graniastostupy

Regularne kształty graniastostupów prawidłowych są bardzo funkcjonalne, jednak w otaczającej nas rzeczywistości możemy spotkać również inne graniastostupy proste, a bywa również, że i pochyłe.

Przypomnijmy, że objętość graniastostupa możemy policzyć ze wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie:

$P_p$  – to pole podstawy liczone ze wzoru właściwego dla danego wielokąta,

$H$  – to wysokość graniastostupa, która w przypadku **graniastostupa prostego** jest równa długości krawędzi bocznej.

Pole powierzchni graniastostupa policzymy ze wzoru:

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

gdzie:

$P_b$  – jest polem powierzchni bocznej będącego sumą pól poszczególnych ścian bocznych (w przypadku graniastostupa prostego są to pola prostokątów o bokach będących odpowiednimi krawędziami podstawy i krawędzią boczną, w przypadku graniastostupa pochyłego są to pola równoległoboków będących ścianami bocznymi).

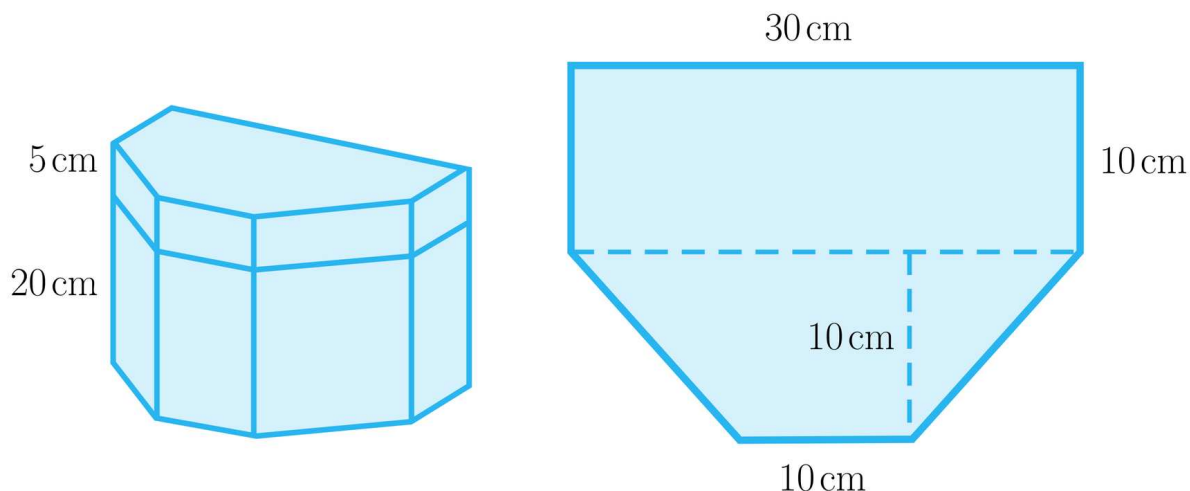
Przypomnijmy, że aby policzyć pole powierzchni bocznej graniastostupa prostego wystarczy pomnożyć obwód wielokąta w podstawie przez **wysokość graniastostupa**.

W przypadkach rzeczywistych szczególną uwagę należy zwrócić na zagadnienia dotyczące obliczania pól, ponieważ bardzo często niektóre ściany graniastostupa są pomijane – tak jest na przykład w zadaniach, w których budujemy pudełka bez wieczka, akwaria, wazon lub malujemy pomieszczenia.

### Przykład 3

Kasia chce podarować swojej mamie drewnianą szkatułkę przyozdobioną techniką decoupage tzn. całą powierzchnię zewnętrzną szkatułki poza spodem chce okleić serwetkami papierowymi z motywami ozdobnymi. Szkatułka ma kształt graniastostupa prostego sześciokątnego o podstawie jak na rysunku. Kasia wykorzystuje serwetki o wymiarach 33 cm × 33 cm. Obliczymy, ile serwetek użyje Kasia, jeżeli do powierzchni ozdabianego przedmiotu należy doliczyć około 10%.

### Rozwiązanie



Sześciokąt w podstawie można podzielić na prostokąt i trapez równoramienny.

Mamy wtedy:

$$P_p = P_{pros} + P_{tr}$$

$$\text{Czyli } P_p = 30 \cdot 10 + \frac{(30+10) \cdot 10}{2} = 300 + 200 = 500 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Do obliczenia pola bocznego potrzebujemy jeszcze długości ramienia trapezu. Z danych na rysunku wynika, że będzie to przeciwprostokątna równoramiennego trójkąta prostokątnego i będzie mieć długość  $10\sqrt{2}$  cm.

Szkatułka razem z wieczkiem ma wysokość 25 cm.

$$\text{Czyli } P_b = 25 \cdot (3 \cdot 10 + 2 \cdot 10\sqrt{2} + 30) \approx 2207 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

A zatem powierzchnia do oklejenia (bez spodu) będzie wynosić w przybliżeniu

$$500 + 2207 = 2707 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Należy doliczyć do tego jeszcze 10%:

$$2707 + 270,7 = 2977,7 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Powierzchnia jednej serwetki to  $33 \cdot 33 = 1089 \text{ [cm}^2\text{]}$ .

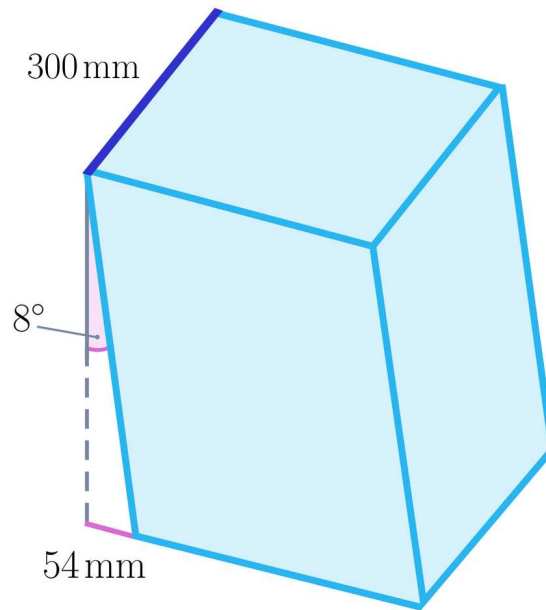
Mamy  $2977,7 : 1089 \approx 2,73$ .

Czyli Kasia zużyje trzy serwetki do oklejenia szkatułki.

#### Przykład 4

Betonowy słupek parkingowy ma kształt graniastosłupa pochyłego, którego podstawą jest kwadrat. Dwie ze ścian, które nie są prostokątami, są prostopadłe do podstawy. Kąt nachylenia wysokości słupka do ściany bocznej będącej prostokątem wynosi  $8^\circ$ . Wykorzystując dane na rysunku obliczymy jaka jest masa takiego słupka, jeżeli gęstość betonu, z którego został wykonany wynosi  $2222 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

### Rozwiązanie



Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 8^\circ = \frac{54}{H}$$

Czyli  $0,1405 = \frac{54}{H}$ , a stąd ostatecznie  $H \approx 384$  [mm].

Obliczymy objętość słupka i wyrazimy ją w  $\text{m}^3$ .

Mamy

$$V = 300^2 \cdot 384 = 34560000 \text{ [mm}^3\text{]} = 34560 \text{ [cm}^3\text{]} = 0,03456 \text{ [m}^3\text{]}$$

Korzystamy ze wzoru na gęstość:  $\rho = \frac{m}{V}$ .

Czyli  $2222 = \frac{m}{0,03456}$ , a stąd ostatecznie masa słupka wynosi  $m \approx 76,79$  [kg].

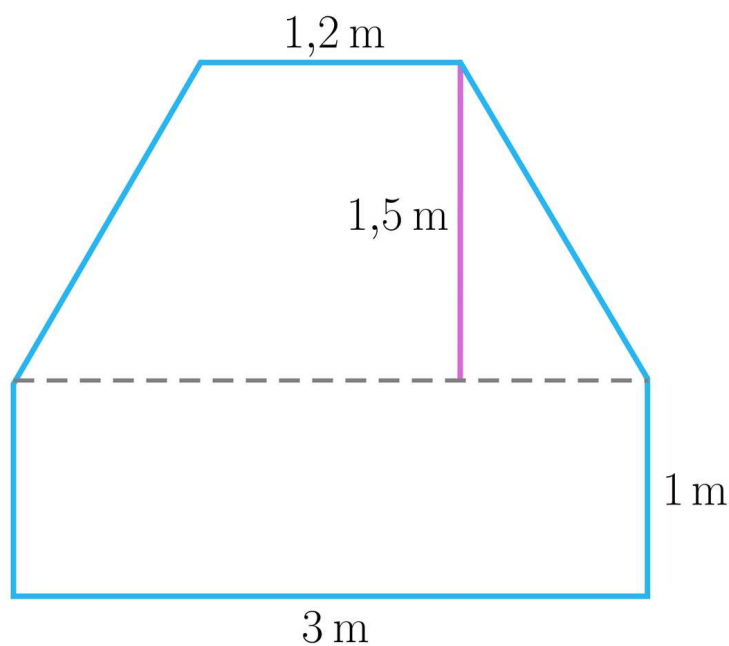
### Przykład 5

Pokój Maćka wygląda jak na rysunku.



Źródło: dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com), licencja: CC BY 3.0.

Latem jest tam bardzo gorąco, więc Maciek planuje kupić klimatyzator. Moc klimatyzatora wylicza się mnożąc objętość pomieszczenia wyrażoną w metrach sześciennych przez współczynnik  $40 \frac{W}{m^3}$ , gdzie  $W$ , to jednostka mocy. Policzmy moc klimatyzatora potrzebnego Maćkowi, wiedząc że długość pokoju to 5 m a wymiary przedstawionej na rysunku ściany są następujące.



**Rozwiązanie**

Zauważ, że na pokój Maćka możemy spojrzeć jak na graniastosłup prosty, którego podstawą jest ściana przedstawiona na rysunku wyżej a wysokość  $H = 5$  m. Aby obliczyć objętość pokoju musimy policzyć pole sześciokąta z rysunku. Zauważmy, że jest to trapez i prostokąt, więc

$$P = 3 \cdot 1 + \frac{4,2 \cdot 1,5}{2} = 6,15$$

Zatem objętość pokoju Maćka to  $30,75 \text{ [m}^3\text{]}$ .

Moc klimatyzatora, którego potrzebuje Maciek to

$$30,75 \text{ m}^3 \cdot 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^3} = 1230 \text{ W} = 1,23 \text{ kW}$$

## Słownik

**graniastosłup prosty**

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami

**graniastosłup prawidłowy**

graniastosłup prosty, w którego podstawie jest wielokąt foremny

**wysokość graniastosłupa**

odcinek, którego długość jest równa odległości między płaszczyznami różnych podstaw graniastosłupa

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zastanów się jaki kształt ma zwykle klin używany m.in. do blokowania drzwi i sztabka złota. Zapoznaj się z treścią filmu, aby uzyskać odpowiedź.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dd4Yp1HdF>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego graniastosłupa- zadania z kontekstem realistycznym.



---

## Polecenie 2

Sprawdź, czy sztabka złota, która pojawia się w filmie zmieści się w niewielkim sejfie w kształcie prostopadłościanu o krawędziach podstawy 11 cm i 4 cm oraz pojemności 242 cm<sup>3</sup>.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

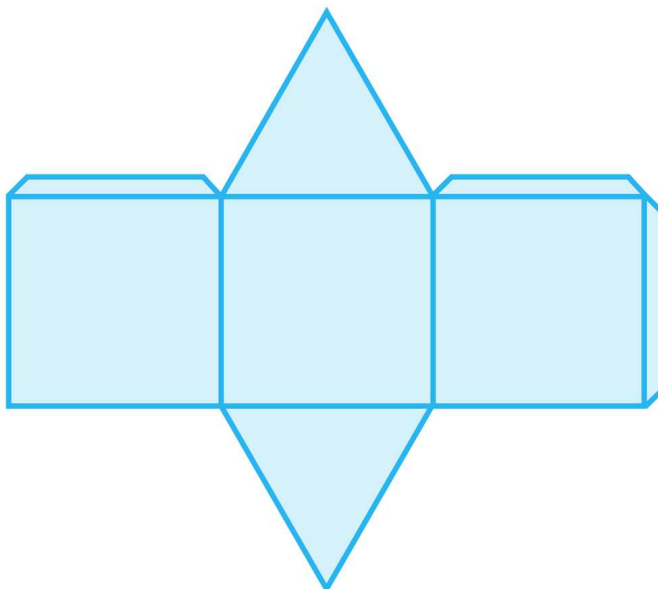


Firma "FIRE" produkująca świece ozdobne kupiła pewną ilość wosku. Będzie sprzedawać świece w cenie 6 zł za sztukę. Który model świec w kształcie graniastostupa prawidłowego powinna wybrać, aby przychód ze sprzedaży świec był największy?

## Ćwiczenie 5



Zosia chce wykonać pudełko z wiekiem w kształcie graniastostupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy i wysokości równej 18 cm z siatki, której szkic znajduje się poniżej.



Dodatkowo Zosia chce, aby odcinek o długości równej sumie trzech boków kwadratu był równoległy do krawędzi kartki. Zosia uwzględni trzy zakładki w kształcie trapezu równoramiennego o podstawach 18 cm i 16 cm i wysokości 1 cm. Rozważa zakup jednego z poniższych formatów papieru:

**A2:** 420 mm × 594 mm;

**B2:** 500 mm × 707 mm;

**C2:** 458 mm × 648 mm.

Doradź Zosi, który arkusz powinna kupić.

## Ćwiczenie 6

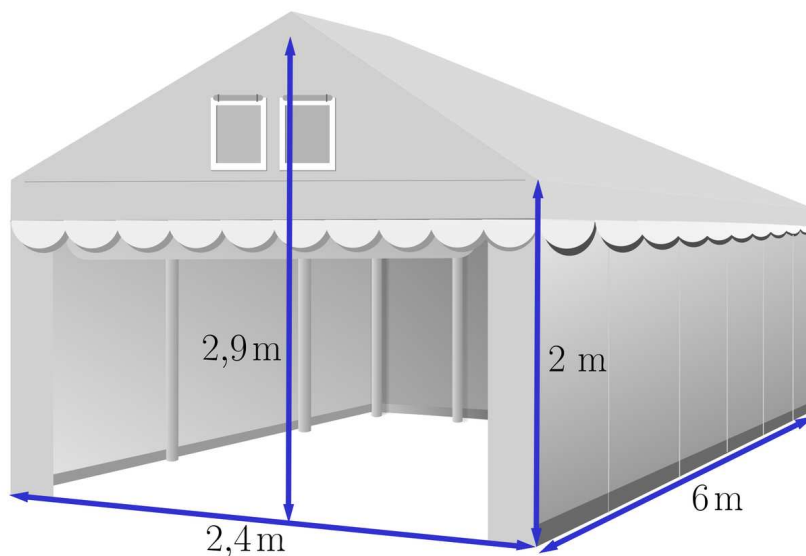


Trampolina ogrodowa ma kształt graniastostupa prawidłowego ośmiokątnego. Wysokość siatki wynosi 240 cm, a najdłuższa przekątna podstawy ma długość 320 cm. Ile zapłacimy za zakup nowej siatki zewnętrznej na tę trampolinę, jeżeli metr bieżący siatki o wysokości 240 cm kosztuje 20 zł?

### Ćwiczenie 7



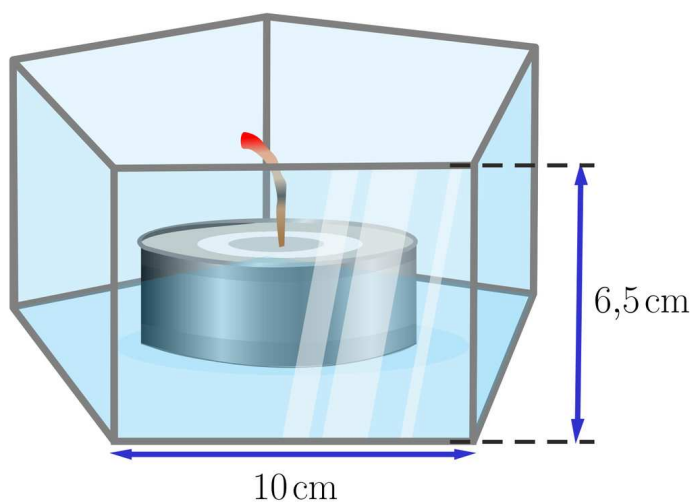
Pan Kowalski ma namiot bez podłogi w kształcie graniastostupa prostego pięciokątnego o wymiarach jak na rysunku. Wejście namiotu jest zamykane rozwijaną plandeką. Pan Kowalski chciałby go umyć w myjni PCV. Koszt mycia to 2 zł za  $m^2$ , przy czym pole mytej powierzchni przybliża się z nadmiarem do pełnych metrów kwadratowych. Do powierzchni namiotu dodajemy 5% na zakładki i falbanki. Ile pan Nowak zapłaci za mycie namiotu?



### Ćwiczenie 8



Jaką powierzchnię ma szkło potrzebne do wyprodukowania świecznika w kształcie graniastostupa prawidłowego pięciokątnego o krawędzi podstawy 10 cm i wysokości 6,5 cm, jak na rysunku?



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Graniastosłupy – zadania z kontekstem realistycznym

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje graniastosłupy w przedmiotach codziennego użytku
- oblicza objętość i pole powierzchni graniastosłupów z zastosowaniem twierdzeń dotyczących trójkątów
- dobiera odpowiedni model matematyczny przy rozwiązywaniu zadań praktycznych
- wykorzystuje własności kątów, odcinków i wielokątów do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupa.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja

### **Formy pracy:**

- praca całą klasą
- praca w grupach

### **Środki dydaktyczne:**

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- arkusze papieru i flamastry dla poszczególnych grup
- modele brył

### **Przebieg lekcji:**

#### **Przed lekcją:**

- Przed lekcją nauczyciel zleca chętnemu uczniowi opracowanie prezentacji na temat wykorzystania graniastosłupów w architekturze.

#### **Faza wstępna:**

1. Uczeń prezentuje wykorzystanie graniastosłupów w architekturze.
2. Nauczyciel pyta uczniów o inne zastosowania graniastosłupów w życiu codziennym.
3. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom przykładowe zadania z sekcji „Przeczytaj” dotyczące zastosowań graniastosłupów.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 6 grup. Każda z grup rozwiązuje przykładowe zadania dotyczące graniastosłupów z podziałem na obliczanie pola i objętości.
3. Przedstawiciele grup przedstawiają swoje propozycje.
4. Uczniowie w tych samych grupach wykonują zadanie 2 z sekcji „Sprawdź się”, następnie prezentują swoje rozwiązanie.
5. Nauczyciel przedstawia uczniom film dotyczący wykorzystania własności graniastosłupów w zadaniach z kontekstem realistycznym.
6. Uczniowie samodzielnie rozwiązują polecenia z sekcji Film i zadania zawarte w sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel monitoruje pracę uczniów, udziela im wskazówek.

7. Nauczyciel prezentuje poprawne rozwiązania.

**Faza podsumowująca:**

1. Uczniowie rozwiązują zadanie 1 i zadanie 3 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczycielem prowadzi rozmowę podsumowującą na temat trudności związanych z omawianym tematem.

**Praca domowa:**

1. Zapoznać się ponownie z filmem.
2. Wykonać pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)
- [Pole powierzchni graniastosłupa](#)
- [Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Film można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Objętość graniastosłupa”.