Środkowe w trójkącie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Materiał ten powiązany jest z szerszym tematem szczególnych odcinków w trójkącie oraz szczególnych punktów w trójkącie. Na przykład znany jest fakt, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym ortocentrum. Również dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, a punkt przecięcia symetralnych boków jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Pokażemy, że również środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dodatkowo jest środkiem ciężkości tego trójkąta.

Twoje cele

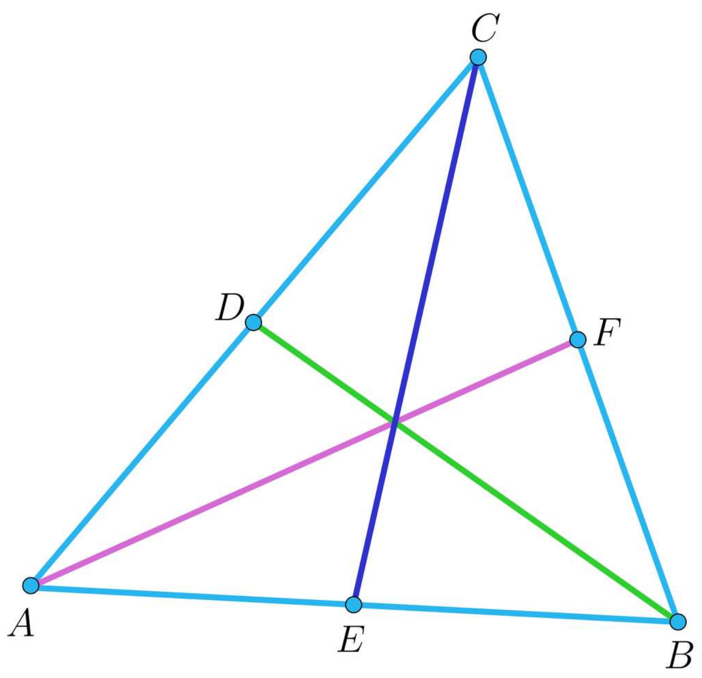
- Poznasz i sformułujesz pojęcie środkowej w trójkącie.
- Poznasz własności środkowych w trójkącie i w jakiej proporcji dzieli je punkt przecięcia oraz gdzie leży i jakie ma własności środek ciężkości trójkąta.
- Poznasz własności pól trójkątów wyznaczonych przez środkowe w trójkącie.
- Wyznaczysz współrzędne środka ciężkości trójkąta, w którym podane są współrzędne wierzchołków.
- Zastosujesz własności środkowych trójkąta w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: środkowej trójkąta

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Oczywiście w każdym trójkącie są trzy środkowe, zaznaczone na rysunku kolorami.



Twierdzenie: o środkowej

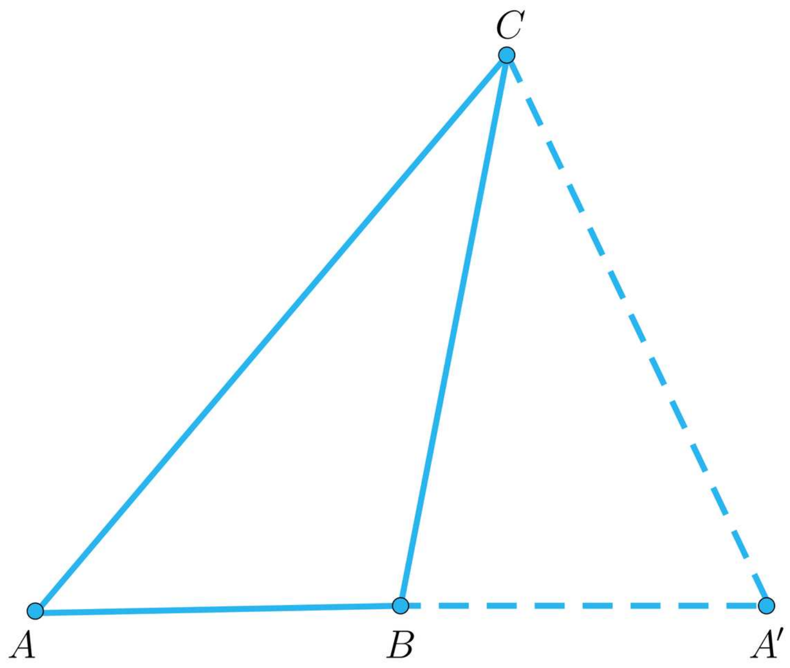
Dowolna środkowa trójkąta dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.

Dowód

Weźmy dowolną środkową trójkąta ABC, na przykład CE. Wtedy trójkąty ACE i BCE mają wspólną wysokość i podstawy równej długości, więc mają równe pola.

Przykład 1

Na rysunku na przedłużeniu boku AB zaznaczono punkt $A^{'}$ taki, że $|AB| = |A^{'}B|$.



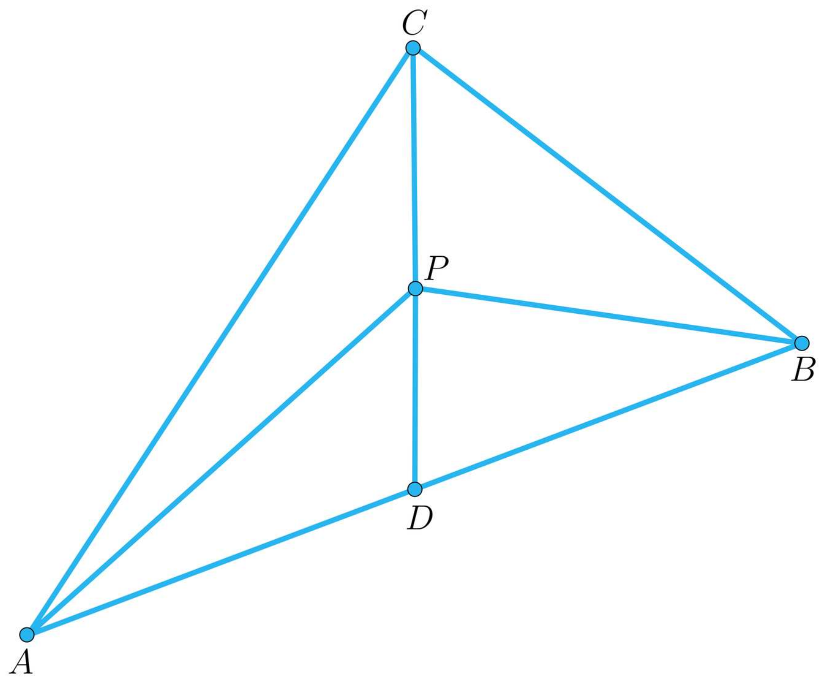
Pokażemy, że pole trójkąta $AA^{'}C$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, z równości $|AB| = \left|A^{'}B\right|$ wynika CB jest środkową trójkąta $AA^{'}C$, więc $P_{ABC} = P_{A^{'}BC}$. Stąd $P_{AA^{'}C} = P_{ABC} + P_{A^{'}BC} = 2P_{ABC}$.

Przykład 2

Pokażemy, że jeśli punkt P leży na środkowej CD trójkąta ABC to pola trójkątów APD i BPD są równe.



Rozwiązanie

Ponieważ odcinek CD jest środkową trójkąta ABC, a punkt P leży na tej środkowej, to punkt D jest środkiem boku AB trójkąta ABP. Stąd odcinek PD jest środkową trójkąta ABP. Stąd dzieli on ten trójkąta na dwa trójkąty APD i BPD o równych polach.

Zanim przejdziemy do głównego twierdzenia w tym materiale, przypomnimy własności linii środkowej w trójkącie, czyli odcinka, który łączy środki dwóch boków w trójkącie.

Twierdzenie: o linii środkowej w trójkącie

Linia środkowa w trójkącie jest równoległa do podstawy i długość linii środkowej jest równa połowie długości podstawy.

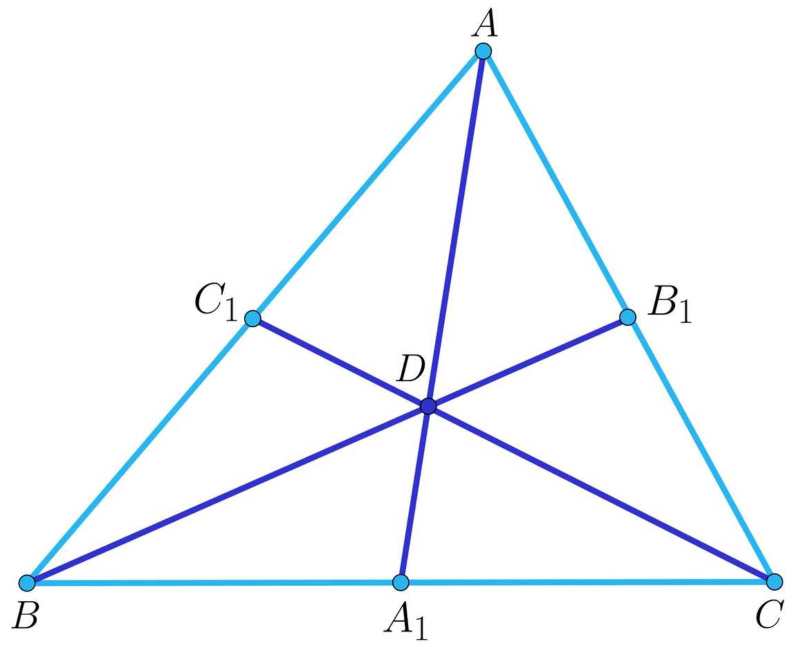
Twierdzenie główne

Twierdzenie: o punkcie przecięcia środkowych w trójkącie

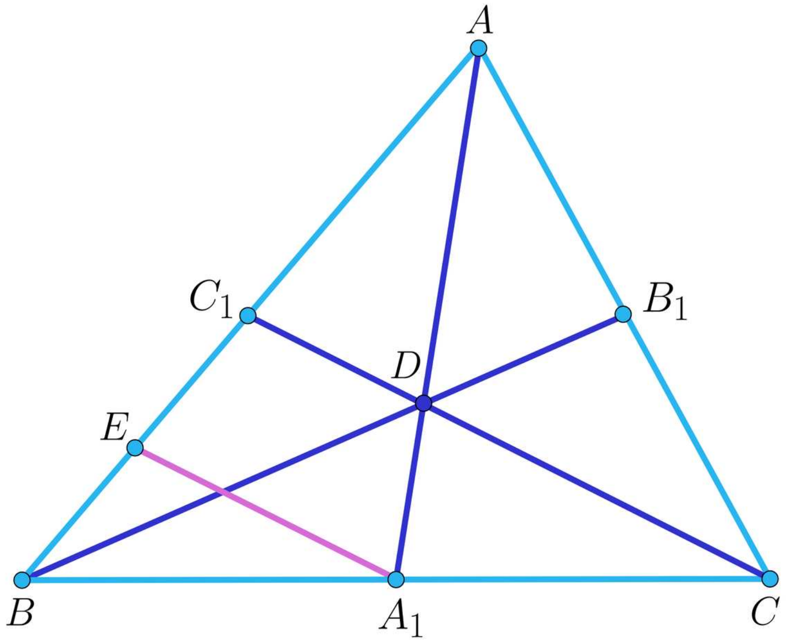
Środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie i punkt ten dzieli środkowe w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołków trójkąta.

Dowód

Niech D będzie punktem przecięcia środkowych AA_1, BB_1 i CC_1 w trójkącie ABC.



Wyznaczamy na boku AB punkt E taki, że $A_1E \parallel CC_1$.



Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{|BE|}{|BC_1|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, co oznacza, że $|BE| = |EC_1|$. Stąd: $|EC_1| = \frac{1}{4}|AB|$.

Stostując twierdzenie Talesa do trójkąta AEA_1 i wykorzystując powyższą równość otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|DA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1E|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{\frac{1}{4}|AB|} = 2.$$

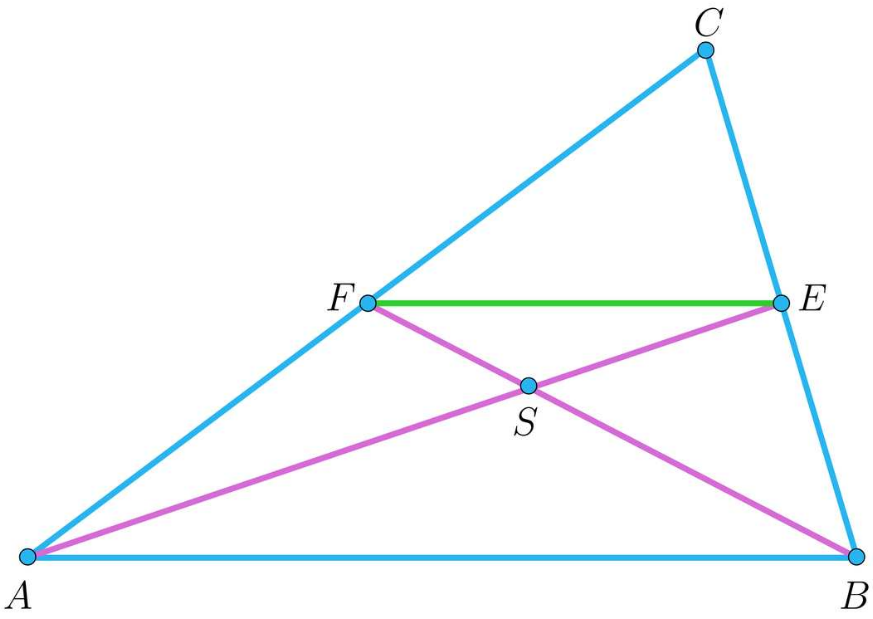
Zatem: $|AD| = 2|DA_1|$.

Wnioskujemy stąd, że punkt przecięcia środkowych dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$ (od strony wierzchołka). To należało udowodnić.

Przykład 3

W trójkącie ABC środkowe AE i BF przecinają się w punkcie S. Pokażemy, że trójkąt ESF jest podobny do trójkąta ASB w skali $1:2$, a stąd stosunek pól tych trójkątów wynosi $1:4$.

Rozwiązanie



Ponieważ punkt S jest punktem przecięcia środkowych w trójkącie ABC, to:
$|AS| = 2 \cdot |SE|$ i $|BS| = 2 \cdot |SF|$.

Odcinek EF łączy środki boków BC i AC, zatem $|AB| = 2 \cdot |EF|$.

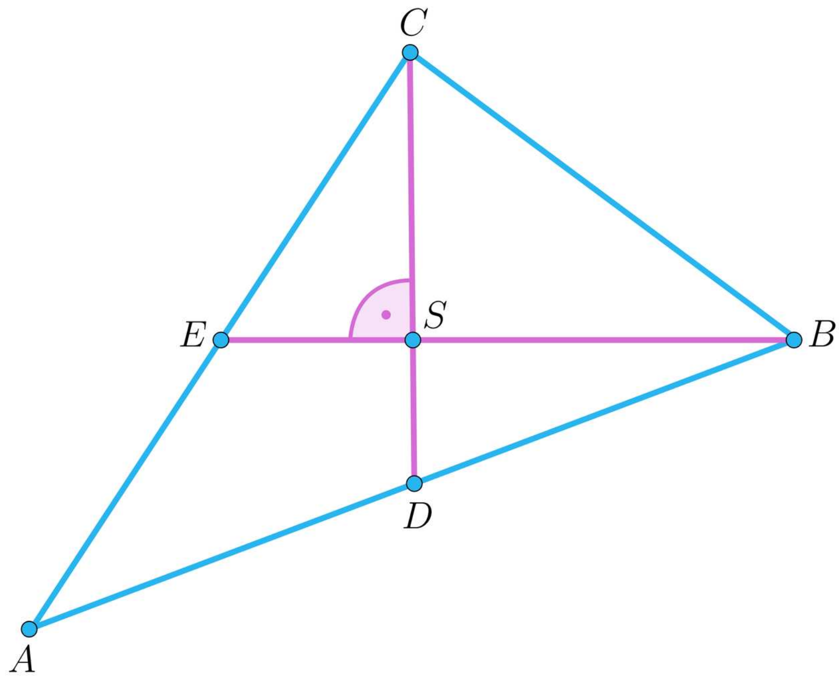
Stąd trójkąty ESF i ASB są podobne w skali $1 : 2$. A z własności skali podobieństwa: stosunek pól tych trójkątów wynosi $1 : 4$.

Przykład 4

Środkowe BE i CD trójkąta ABC są prostopadłe, $|BE| = 12$, $|CD| = 8$. Wyznaczymy długości boków trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Popatrzmy na rysunek.



Ponieważ S dzieli środkowe w stosunku $2:1$, to:

$|CS| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{16}{3}$

$|SD| = \frac{1}{3} \cdot |CD| = \frac{8}{3}$

$|BS| = \frac{2}{3} \cdot |BE| = 8$

$|ES| = \frac{1}{3} \cdot |BE| = 4$

Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości odpowiednich odcinków:

$|CE|^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{400}{9}$, więc $|CE| = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$ i stąd $|AC| = 2|CE| = \frac{40}{3}$

$|BC|^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 8^2 = \frac{832}{9}$, więc $|BC| = \sqrt{\frac{832}{9}} = \frac{8\sqrt{13}}{3}$

$|BD|^2 = (\frac{8}{3})^2 + 8^2 = \frac{640}{9}$, więc $|BD| = \sqrt{\frac{640}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$ i stąd $|AB| = 2 \cdot |BD| = \frac{16\sqrt{10}}{3}$

Przykład 5

Pokażemy, że środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy fakt, że kąt oparty na średnicy okręgu jest kątem prostym. Środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego łączy punkt na okręgu ze środkiem średnicy, czyli ze środkiem okręgu. Stąd mamy, że długość środkowej jest równa długości promienia okręgu, czyli połowie średnicy.

Środek ciężkości trójkąta

Punkt przecięcia środkowych trójkąta, ze względu na analogie fizyczne, nazywany jest środkiem ciężkości (**barycentrum**) tego trójkąta.

Sprawdź to sam

Aby zobaczyć te analogie wykonaj sam lub w parze następujące doświadczenie.

1. Narysuj na kartonie dowolny trójkąt.
2. Wyznacz punkt przecięcia dwóch środkowych tego trójkąta. Uwaga! Dla większej dokładności skonstruuj środki dwóch boków.
3. Wytnij starannie narysowany trójkąt.
4. Spróbuj ustawić ten trójkąt na czubku ołówka lub długopisu, tak aby czubek podpierał trójkąt w punkcie przecięcia środkowych.
5. Jeśli wykonałeś dokładnie to zadanie, trójkąt powinien utrzymać się w poziomie.

Kolejne twierdzenie możemy zastosować w sytuacji, gdy znane są współrzędne wierzchołków trójkąta.

Twierdzenie: o współrzędnych punktu ciężkości trójkąta

Jeżeli wierzchołki trójkąta mają współrzędne $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ to środek ciężkości S tego trójkąta ma współrzędne $S = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

Przykład 6

Współrzędne wierzchołków trójkąta ABC wynoszą $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$, $C = (5, -2)$. Wyznaczymy odległość punktu ciężkości S tego trójkąta od wierzchołków A, B, C.

Rozwiązanie

Z powyższego twierdzenia $S = \left(\frac{9}{3}, \frac{3}{3}\right) = (3, 1)$.

Odległości od wierzchołków trójkąta są długościami odcinków:

$$|AS| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2} = 2$$

$$|BS| = \sqrt{(3-3)^2 + (1-4)^2} = 3$$

$$|CS| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Słownik

środkowa trójkąta

odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku

linia środkowa w trójkącie

odcinek, który łączy środki dwóch boków w trójkącie

środek ciężkości trójkąta

punkt przecięcia środkowych trójkąta

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

W symulacji interaktywnej widać trójkąt ABC w układzie współrzędnych. Środkowe tego trójkąta są wyróżnione kolorem różowym. Widać również współrzędne punktów A, B, C. Poruszaj punktami A, B, C.

1. Obserwuj gdzie jest środek ciężkości.
2. Oblicz współrzędne środka ciężkości i porównaj z jego położeniem w układzie współrzędnych.
3. Ustaw punkty A, B, C tak, by punkt S oraz A leżały na jednej z osi i oblicz stosunek długości odcinków AS i SF.
4. Ustaw punkty A, B, C tak, by powstał trójkąt prostokątny i porównaj długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka przy kącie prostym z długością przeciwprostokątnej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D138wrEKM

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

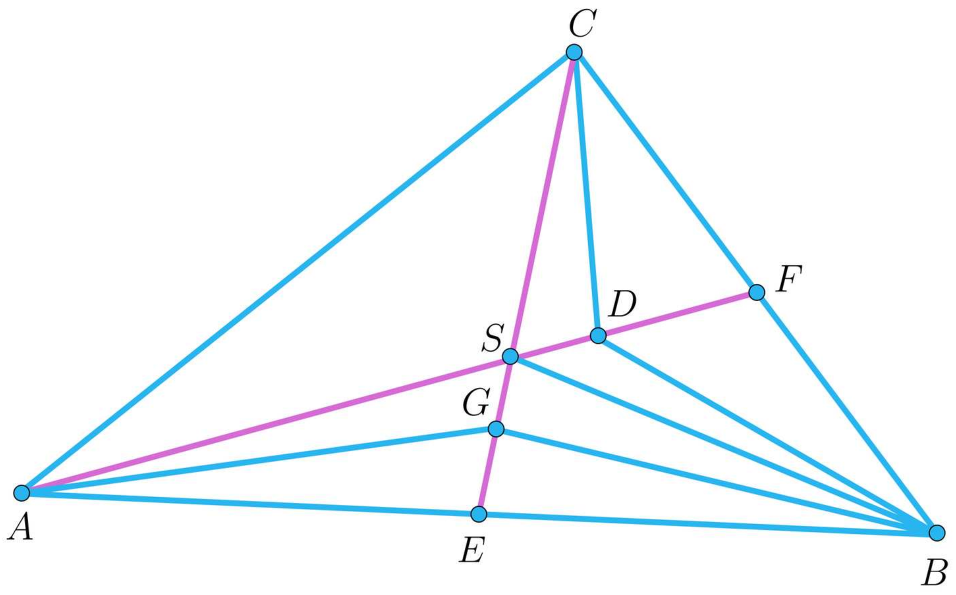
Ćwiczenie 4

Środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest równa:

- promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie
- promieniowi okręgu wpisanego w ten trójkąt
- jednej z przyprostokątnych
- jednej trzeciej przeciwprostokątnej

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC oraz jego środkowe AF i CE. Punkt S jest punktem przecięcia środkowych, a punkty D i G leżą na odpowiednich środkowych.



Ćwiczenie 6

Środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta ostrego równoramiennego trójkąta prostokątnego ma długość 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 7

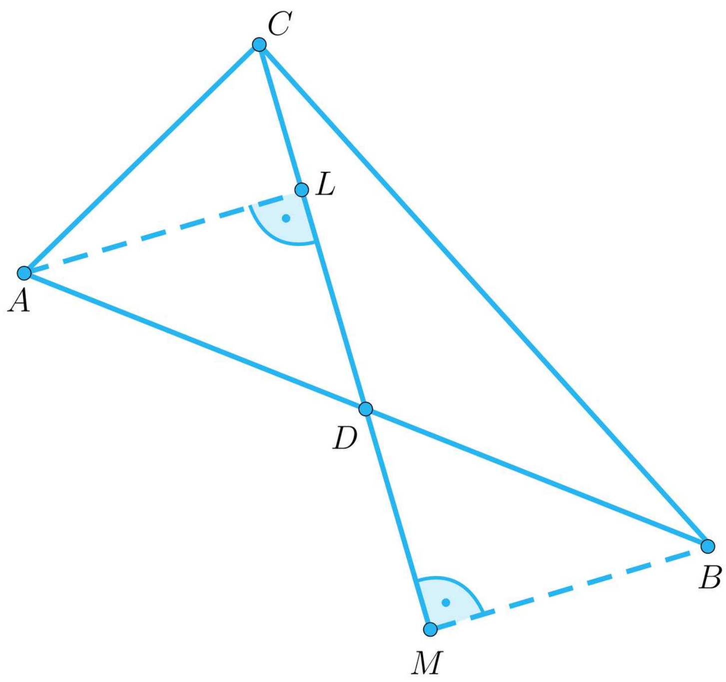
Oblicz odległość środka ciężkości w trójkącie prostokątnym od wierzchołka kąta prostego, jeśli przyprostokątne mają długości 15 i 20.

Ćwiczenie 8

Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość a. Wyznacz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.

Ćwiczenie 9

Na rysunku $|BM| = |AL|$. Pokaż, że CD jest środkową trójkąta ABC.



Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Środkowe w trójkącie i ich własności

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

10. wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12. przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuuje pojęcie środkowej w trójkącie;
- zna własności środkowych w trójkącie
- wie, w jakiej proporcji dzieli środkowe punkt przecięcia oraz gdzie leży i jakie ma własności środek ciężkości trójkąta;
- zna własności pól trójkątów wyznaczonych przez środkowe w trójkącie;
- wyznacza współrzędne środka ciężkości trójkąta, w którym podane są współrzędne wierzchołków;
- stosuje własności środkowych trójkąta w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel przypomina twierdzenia o linii środkowej w trójkącie oraz Talesa w różnych wersjach.
2. Nauczyciel przedstawia temat lekcji, uczniowie wyznaczają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przedstawia definicję środkowej w trójkącie i podaje twierdzenie o linii środkowej w trójkącie.
2. Uczniowie wskazują trójkąty o równych polach powstałych w wyniku cięcia środkowymi (przykład 1, 2 i 3).
3. Uczniowie wyznaczają długości boków w trójkącie mając informacje na temat środkowych trójkąta (przykład 4).
4. Nauczyciel przedstawia pojęcie środka ciężkości trójkąta.
5. Uczniowie wyznaczają współrzędne środka ciężkości w układzie kartezjańskim (przykład 6).
6. Uczniowie zapoznają się z symulacją interaktywną i wykonują polecenia z nim związane.

Faza podsumowująca:

1. Uczeń sprawdza nabyte umiejętności i wiedzę rozwiązując ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Narysowanie dowolnego trójkąta oraz jego środkowych. Zaznaczenie kolorami trójkątów o równych polach.

Materiały pomocnicze:

Trójkąty i ich własności

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana przez uczniów jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.