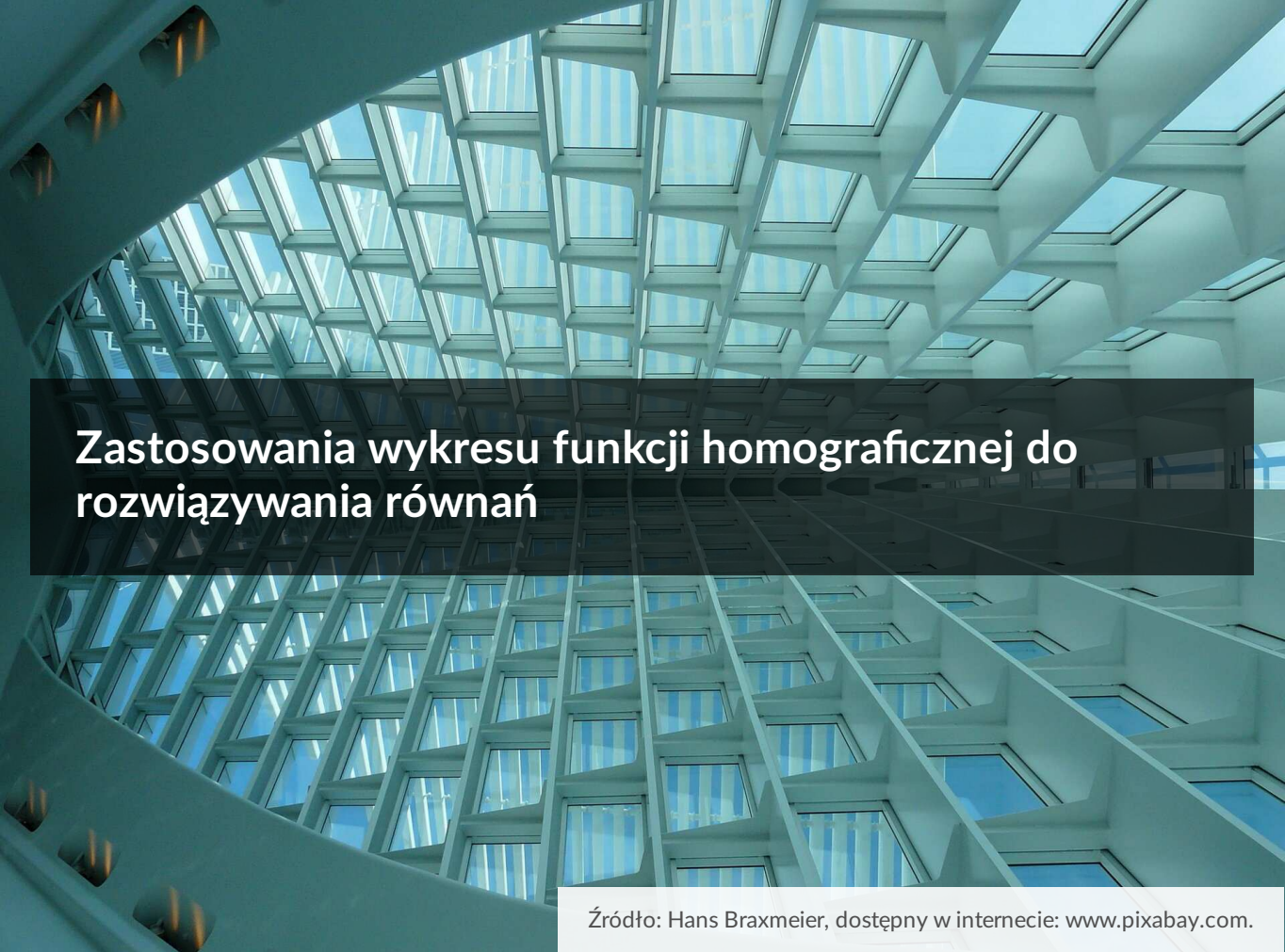




Zastosowania wykresu funkcji homograficznej do rozwiązywania równań

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowania wykresu funkcji homograficznej do rozwiązywania równań

Źródło: Hans Braxmeier, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Równania oraz nierówności można rozwiązywać sposobem algebraicznym lub graficznym. Zazwyczaj wybieramy ten sposób, który jest mniej czasochłonny. W tym materiale, którego treści wykraczają nieco poza podstawę programową, zastosujemy wykresy funkcji homograficznej do rozwiązywania równań wymiernych z parametrem.

Twoje cele

- Wykorzystasz wykresy funkcji homograficznej do określania liczby rozwiązań równania zawierającego wyrażenie wymierne.
- Określisz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcją homograficzną nazywamy **funkcję wymierną** $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$. Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie, które można **przekształcić równoważnie** do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są **wielomianami** i $P(x) \neq 0$.

W tym materiale zajmiemy się określaniem liczby rozwiązań równania zawierającego wyrażenie wymierne w zależności od wartości parametru.

Równania z parametrem można rozwiązywać metodą algebraiczną oraz graficzną.

Tutaj zostanie omówiona metoda graficzna, która dla równań typu $f(x) = g(x)$ jest wygodniejsza. Aby rozwiązać równanie tego typu należy narysować wykresy funkcji znajdujących się po obu stronach równania w jednym układzie współrzędnych.

Niech funkcja $g(x)$ będzie funkcją stałą.

Przykład 1

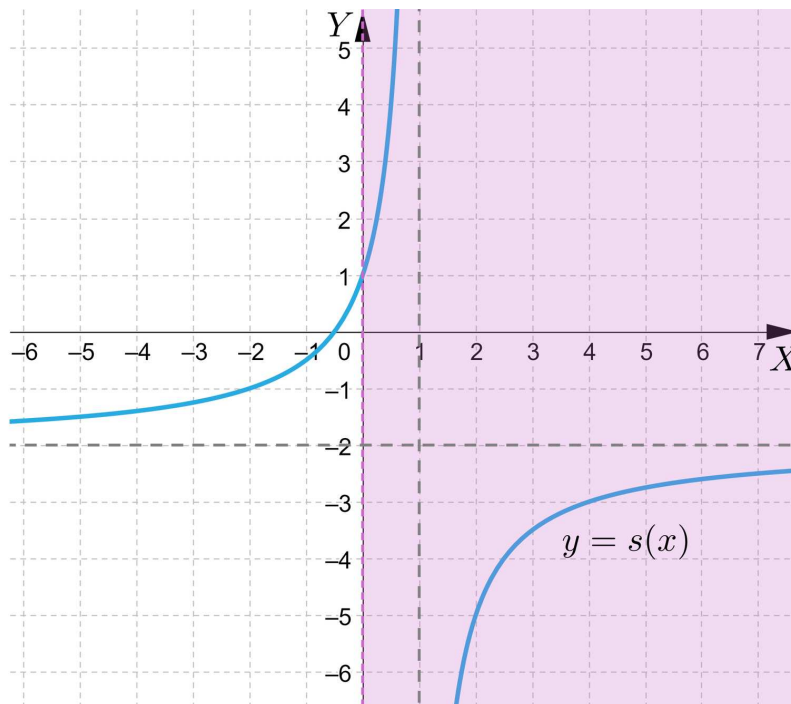
Dane jest równanie $\frac{-3}{x-1} - 2 = m$ z niewiadomą x i parametrem m . Wyznamy wartość parametru m , dla którego równanie:

- a) ma rozwiązanie,
- b) ma rozwiązanie będące liczbą dodatnią.

Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji $s(x) = \frac{-3}{x-1} - 2$.

Wykres funkcji przedstawia rysunek:



Prawą stronę równania przedstawiamy za pomocą wykresu funkcji stałej $g(x) = m$. Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi X . Równanie będzie miało rozwiązanie, gdy wykresy funkcji $s(x)$ oraz $g(x)$ będą miały punkt wspólny. Zauważmy, że tylko dla jednego położenia wykresu funkcji $g(x)$ tak się nie stanie. Taka sytuacja jest dla $g(x) = -2$.

Odpowiedź

a) Równanie ma rozwiązanie dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Równanie ma rozwiązanie dodatnie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ - odczytujemy z wykresu te wartości funkcji $g(x)$, dla których oba wykresy funkcji będą miały punkt wspólny po prawej stronie osi Y , czyli dla $x > 0$. Innymi słowy odczytujemy, dla jakiego y wykres funkcji znajduje się w kolorowym obszarze.

Przykład 2

Dane jest równanie $\frac{-2x-2}{x+2} = m + 5$ z niewiadomą x i parametrem m . Wyznamy wartość parametru m , dla którego równanie ma rozwiązanie będące liczbą mniejszą od (-3) .

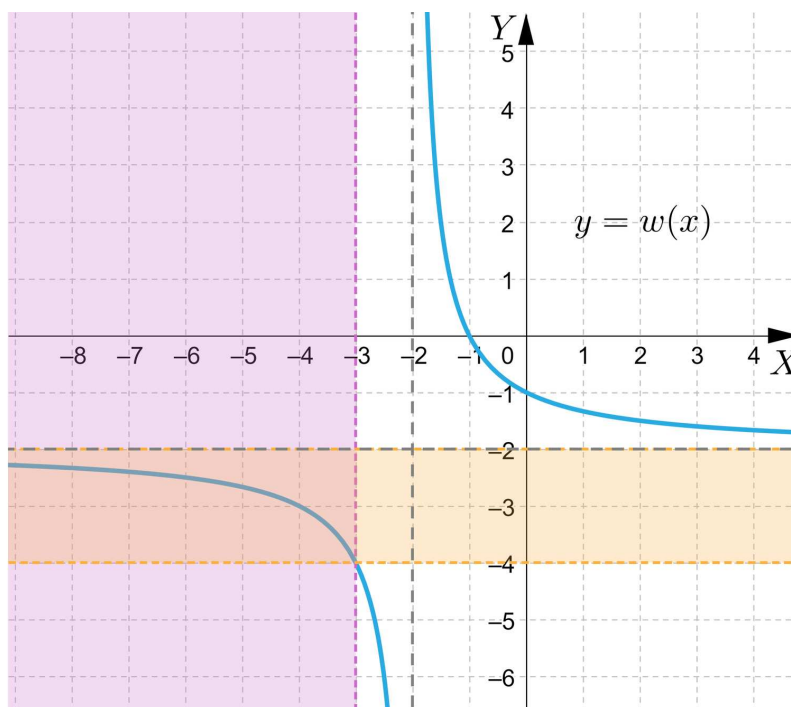
Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji: $w(x) = \frac{-2x-2}{x+2}$.

W tym celu przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$w(x) = \frac{-2x-2}{x+2} = \frac{-2(x+2)+2}{x+2} = -2 + \frac{2}{x+2}.$$

Wykres funkcji przedstawia rysunek:



Prawą stronę równania obrazujemy za pomocą wykresu funkcji $g(x) = m + 5$. Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi X . Równanie będzie miało rozwiązanie mniejsze od (-3) , gdy wykresy funkcji $w(x)$ oraz $g(x)$ będą miały punkt wspólny w obszarze fioletowym. Zauważmy, że wtedy wartości funkcji $g(x)$ muszą być większe od (-4) i mniejsze od (-2) - obszar pomarańczowy na rysunku:

$$\text{czyli } -4 < m + 5 < -2,$$

$$\text{zatem } -9 < m < -7.$$

Przykład 3

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $\frac{2|x|-3}{|x|+3} = 3 - m^2$ w zależności od parametru m .

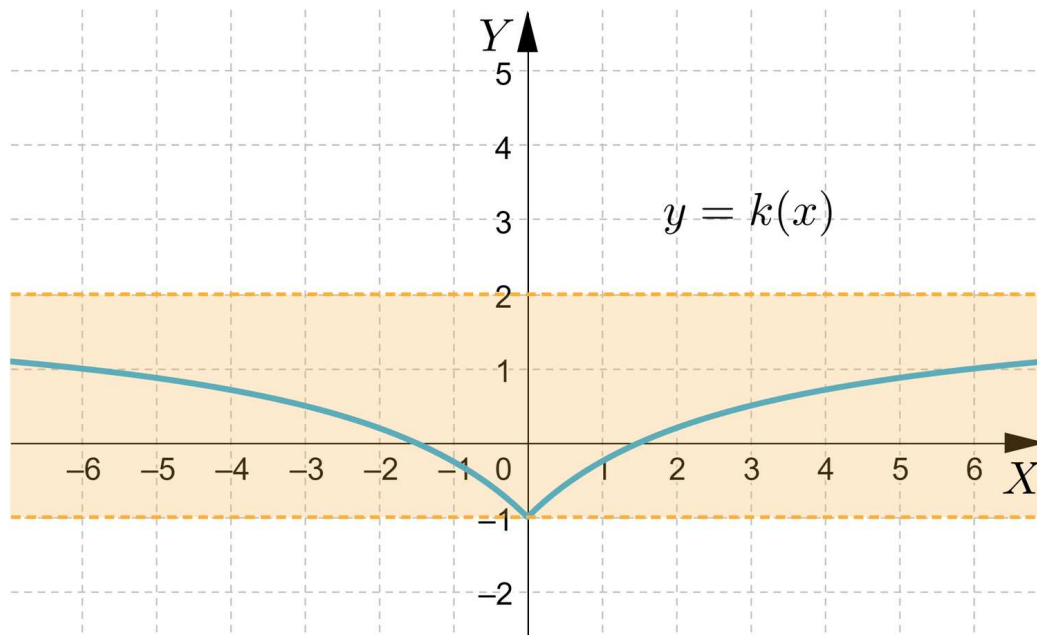
Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji $k(x) = \frac{2|x|-3}{|x|+3}$.

W tym celu przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$k(x) = \frac{2|x|-3}{|x|+3} = \frac{2(|x|+3)-9}{|x|+3} = 2 - \frac{9}{|x|+3}.$$

Wykres funkcji przedstawia rysunek:



Prawą stronę równania zobrazujemy za pomocą wykresu funkcji $g(x) = 3 - m^2$. Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi X . Równanie będzie miało rozwiązanie, gdy wykresy funkcji $k(x)$ oraz $g(x)$ będą miały punkt wspólny.

Zauważmy, że jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w białym obszarze, to nie ma punktu wspólnego z wykresem funkcji $k(x)$, czyli równanie nie ma rozwiązań.

Jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w pomarańczowym obszarze, to ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji $k(x)$, czyli równanie ma dwa rozwiązania.

Dla $g(x) = -1$ wykresy funkcji mają jeden punkt wspólny, czyli równanie ma jedno rozwiązanie.

Odpowiedź

Równanie ma:

- 0 rozwiązań dla $3 - m^2 < -1$ lub $3 - m^2 \geq 2$,
czyli $4 - m^2 < 0$ lub $1 - m^2 \geq 0$,
zatem $m \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 1 \rangle \cup (2; \infty)$;
- 1 rozwiązanie dla $3 - m^2 = -1$,
czyli $4 - m^2 = 0$,
zatem dla $m \in \{-2; 2\}$;
- 2 rozwiązania dla $3 - m^2 > -1$ i $3 - m^2 < 2$,

czyli $4 - m^2 > 0$ i $1 - m^2 < 0$,

zatem $m \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Przykład 4

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| = m$ w zależności od parametru m .

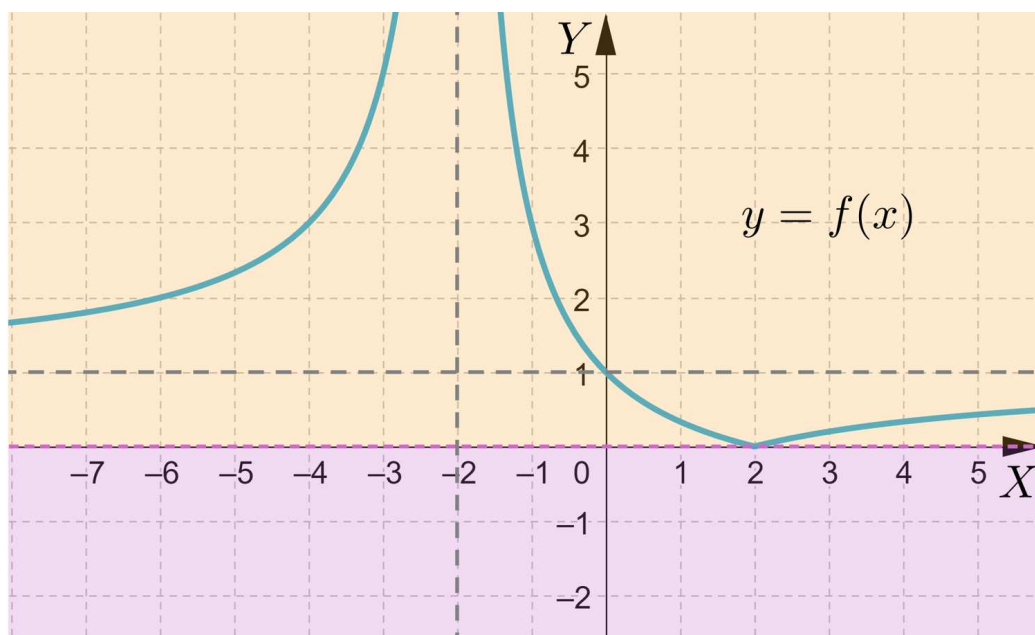
Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$.

W tym celu przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \left| \frac{x+2-4}{x+2} \right| = \left| 1 - \frac{4}{x+2} \right|.$$

Wykres funkcji przedstawia rysunek:



Prawą stronę równania zobrazujemy za pomocą wykresu funkcji $g(x) = m$. Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi X . Równanie będzie miało rozwiązanie, gdy wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ będą miały punkt wspólny.

Zauważmy, że jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w fioletowym obszarze, to nie ma punktu wspólnego z wykresem funkcji $f(x)$, czyli równanie nie ma rozwiązań.

Jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w pomarańczowym obszarze (ale oprócz 0 i 1), to ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji $f(x)$, czyli równanie ma dwa rozwiązania.

Dla $g(x) = 0$ i $g(x) = 1$ wykresy funkcji mają jeden punkt wspólny, czyli równanie ma jedno rozwiązanie.

Odpowiedź

Równanie ma:

- 0 rozwiązań dla $m < 0$;
- 1 rozwiązanie dla $m = 0$ lub $m = 1$;
- 2 rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup (1; \infty)$.

Przykład 5

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{-3|x|+2}{|x|-1} \right| = m$ w zależności od parametru m .

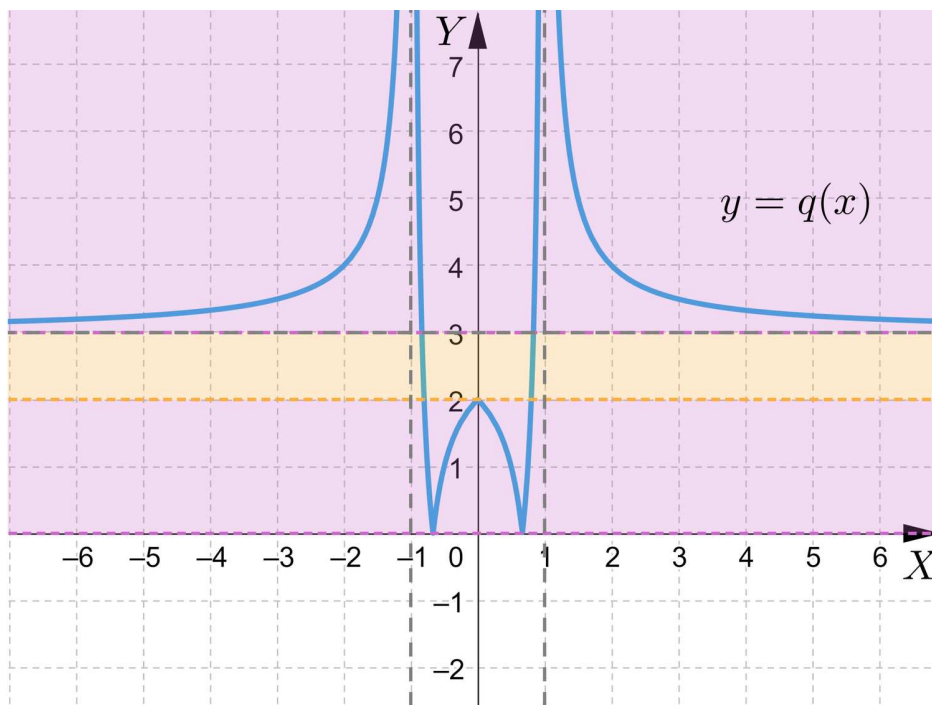
Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji $q(x) = \left| \frac{-3|x|+2}{|x|-1} \right|$.

W tym celu przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$q(x) = \left| \frac{-3|x|+2}{|x|-1} \right| = \left| \frac{-3(|x|-1)-1}{|x|-1} \right| = \left| -3 - \frac{1}{|x|-1} \right|.$$

Wykres funkcji przedstawia rysunek:



Prawą stronę równania obrazujemy za pomocą funkcji stałej $g(x) = m$. Wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi X . Równanie będzie miało rozwiązanie, gdy wykresy funkcji $q(x)$ oraz $g(x)$ będą miały punkt wspólny.

Zauważmy, że jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w białym obszarze, to nie ma punktu wspólnego z wykresem funkcji $q(x)$, czyli równanie nie ma rozwiązań.

Jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w fioletowym obszarze, to ma cztery punkty wspólne z wykresem funkcji $q(x)$, czyli równanie ma cztery rozwiązania.

Jeśli wykres funkcji stałej $g(x)$ znajduje się w pomarańczowym obszarze lub na fioletowej linii, to ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji $q(x)$, czyli równanie ma dwa rozwiązania.

Dla $g(x) = 2$ i wykresy funkcji mają trzy punkty wspólne, czyli równanie ma trzy rozwiązanie.

Odpowiedź

Równanie ma:

- 0 rozwiązań dla $m < 0$;
- 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (2; 3)$;
- 3 rozwiązania dla $m = 2$;
- 4 rozwiązania dla $m \in (0; 2) \cup (3; \infty)$.

Słownik

funkcja wymierna

funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów

przekształcenie równoważne

takie przekształcenie równania, w wyniku którego powstaje równanie o takim samym zbiorze rozwiązań

wielomian

wyrażenie algebraiczne będące sumą jednomianów

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją oraz wykonaj zadania w niej zawarte. Następnie wykonaj polecenie 2 i 3.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1HqpxjW9>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania wykresu funkcji homograficznej do rozwiązywania równań.

Polecenie 2

Dane jest równanie $\frac{x+4}{x+1} = m$. Pogrupuj odpowiednio wartości parametru m , przenosząc je w odpowiednie miejsca.

wartości parametru m , dla których równanie ma rozwiązanie dodatnie

wartości parametru m , dla których równanie ma rozwiązanie ujemne

$1 - \sqrt{3}$

2π

$\sqrt{5} + 1$

$\sqrt{17}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

π

$\sqrt{15}$

Polecenie 3

Uzupełnij tabelę. Określ liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{-3}{x+5} - 4\right| = m$ w zależności od parametru m .

$(0; 4), 0, 1, 2, 3, -5$

m	liczba rozwiązań
	0
	1
$(0; 4)$	
	2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Równanie $\left|\frac{3}{x}\right| - 1 = m$ ma dwa rozwiązania dla:

☐ $m = -1.$

☐ $m < -1.$

☐ $m > -1.$

Ćwiczenie 2



Które z równań nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 3)$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\left|\frac{4}{x-2} - 3\right| = m$

☐ $\left|\frac{4}{x-2}\right| - 3 = m$

☐ $\left|\frac{4}{x-2}\right| + 3 = m$

Ćwiczenie 3



Dane jest równanie $-\frac{3}{x-1} + 2 = m$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ dla $m \in (2; 5)$ równanie ma rozwiązanie będące liczbą ujemną

☐ dla $m = 2$ równanie nie ma rozwiązań

☐ dla $m \in (2; 5)$ równanie ma rozwiązanie będące liczbą dodatnią

☐ dla $m \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$ równanie ma rozwiązanie będące liczbą ujemną

☐ dla $m \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$ równanie ma rozwiązanie będące liczbą dodatnią

Ćwiczenie 4



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Równanie $\frac{-2x+4}{x+1} = m$ ma rozwiązanie większe od 2 dla:

☐ $m \in (-\infty; -2)$.

☐ $m \in (0; \infty)$.

☐ $m \in (-2; 0)$.

Ćwiczenie 5



Wskaż wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $\left| \frac{2}{x-1} - 4 \right| = m^2 - 3m$ ma jedno rozwiązanie. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ 4☐ -1☐ 2☐ 3☐ 0☐ 5

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, wstawiając wybrane elementy w odpowiednie miejsca w tekście. Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m .

Równanie $\frac{3|x|-1}{|x|-1} = m$ ma rozwiązań dla parametru $\cup$, jedno rozwiązanie dla oraz nie ma rozwiązań dla .

☐ $m \in (1; 3)$ ☐ $m = 3$ ☐ $m = 1$ ☐ $m \in (1; 3)$ ☐ $m \in (-\infty; 1)$ ☐ 2☐ $(3; \infty)$

Ćwiczenie 7



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Równanie $\left| \frac{-3}{x+4} - 2 \right| = 3m + 1$ ma 2 rozwiązania dla:

☐ $m \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

☐ $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$

☐ $m \in (0; 2) \cup (2; \infty)$

☐ $m \in (0; \infty)$

Ćwiczenie 8



Określ liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{3|x|-3}{|x|-2} \right| = m$ w zależności od parametru m . Wpisz w odpowiednie miejsca tabeli liczbę rozwiązań.

wartość parametru m	liczba rozwiązań równania
$m \in (-\infty; 0)$	
$m = 0$	
$m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$	
$m = \frac{3}{2}$	
$m \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$	
$m \in (3; \infty)$	

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wykresu funkcji homograficznej do rozwiązywania równań

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

13. Uczeń posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę rozwiązań równania zawierającego wyrażenie wymierne w zależności od parametru;
- wykorzystuje wykresy funkcji homograficznej do określania liczby rozwiązań równania zawierającego wyrażenie wymierne;

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- pokaz multimedialny,

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca indywidualna
- praca z całą klasą

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z sekcją Wprowadzenie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają najważniejsze informacje dotyczące rysowania i przekształcania wykresów funkcji homograficznej.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel w razie potrzeby pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Nauczyciel wyświetla animację. Po jej obejrzeniu uczniowie formułują kolejne etapy rozwiązywania równań z zastosowaniem wykresów funkcji homograficznych.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują wskazane polecenia oraz rozwiązują ćw. 1 – 4 w sekcji Sprawdź się. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia 5-8.

Materiały pomocnicze:

- Przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych
- Wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$

Wskazówki metodyczne:

- Animację można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości dotyczących rozwiązywania równań z parametrem, a także jako poszerzenie wiadomości podczas realizacji tematów dotyczących równań liniowych i kwadratowych z parametrem