Styczna do krzywej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Roy Muz, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W tym materiale poznasz wzór na styczną do wykresu funkcji oraz kilka przykładów jego zastosowania. Jeżeli zastanawiałeś się, w którym kierunku poleci kula pchnięta przez sportowca na olimpiadzie, to teraz poznasz odpowiedź na to pytanie.

Twoje cele

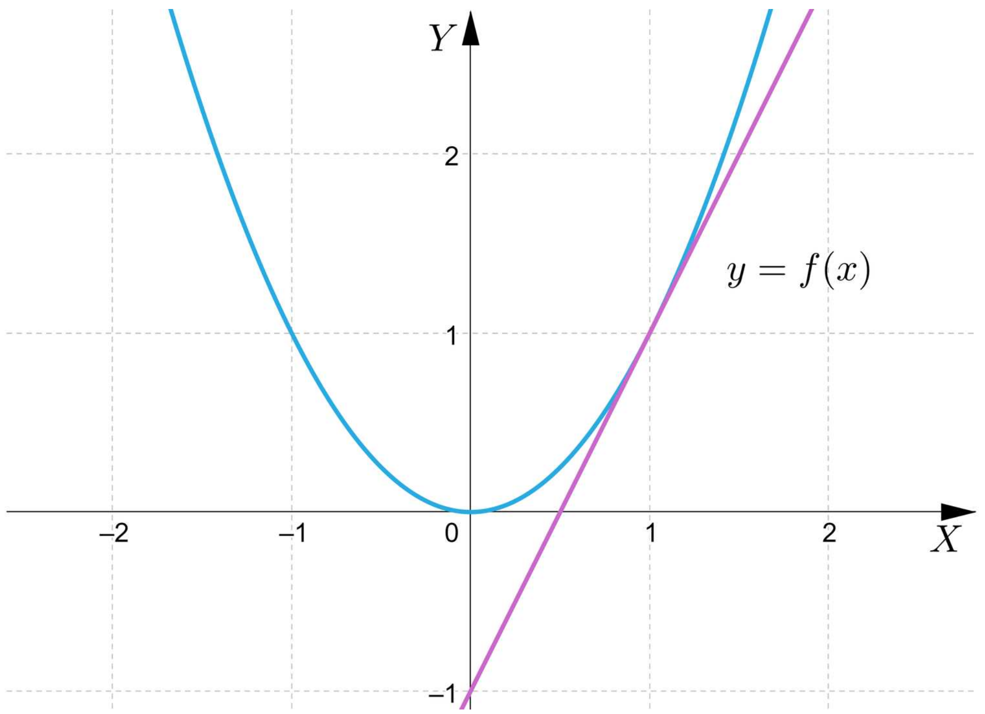
- Wyznaczysz wzór ogólny prostej stycznej do wykresu funkcji.
- Wyznaczysz równania stycznych do wykresów wybranych funkcji.

Przeczytaj

Wzór ogólny stycznej do wykresu funkcji

> **Definicja: styczna do krzywej**
>
> Styczna do krzywej w danym punkcie jest to prosta, która w małym otoczeniu tego punktu ma przebieg podobny do przebiegu krzywej oraz ma w tym otoczeniu dokładnie jeden punkt wspólny z krzywą.

Taka definicja pozwala w miarę łatwo narysować styczną do danego wykresu funkcji w konkretnym punkcie, ale trudno z niej wyprowadzić wzór takiej prostej.



Wykres funkcji $y = x^2$ oraz stycznej w punkcie $(1, 1)$

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna, to pomoże nam pochodna.

Z definicji geometrycznej pochodna funkcji w punkcie jest równa tangensowi kąta nachylenia prostej stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie albo równoważnie jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej stycznej w tym punkcie.

Jeżeli mamy zatem daną funkcję różniczkowalną f i punkt (x_0, y_0), należący do jej wykresu – to znaczy, że $y_0 = f(x_0)$ – oraz oznaczymy prostą styczną do wykresu tej funkcji w punkcie (x_0, y_0) jako $y = ax + b$, to z powyższej definicji wiemy, że $a = f\prime(x_0)$.

Musimy jeszcze wyznaczyć wartość parametru b. Wiemy, że nasza prosta musi przechodzić przez punkt styczności (x_0, y_0), czyli spełnione jest równanie $y_0 = ax_0 + b$. Stąd widzimy, że $b = y_0 - ax_0$.

Wstawiając tę postać b do wzoru prostej, otrzymujemy $y = ax + y_0 - ax_0 = a(x - x_0) + y_0$ i ostatecznie wyznaczamy wzór na prostą styczną w postaci

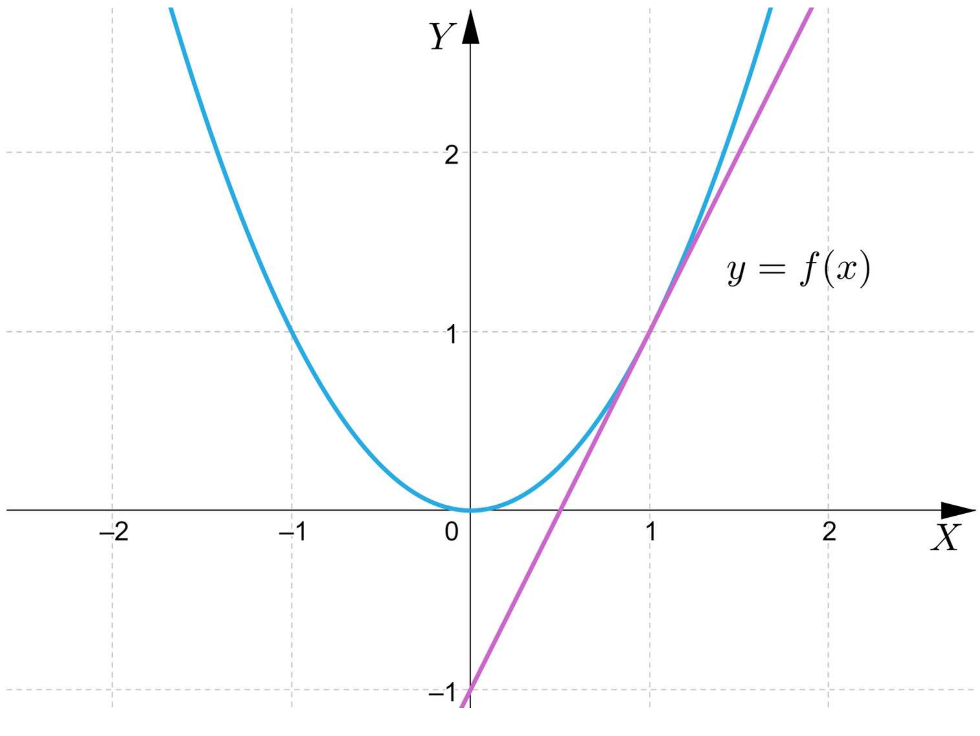
$$y = f\prime(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Przykłady stycznych do wykresu funkcji

Rozpatrzmy kilka prostych przypadków.

Przykład 1

Wyznaczymy wzór stycznej z rysunku, czyli stycznej do wykresu funkcji $y = x^2$ w punkcie $(1, 1)$.



Rozwiązanie

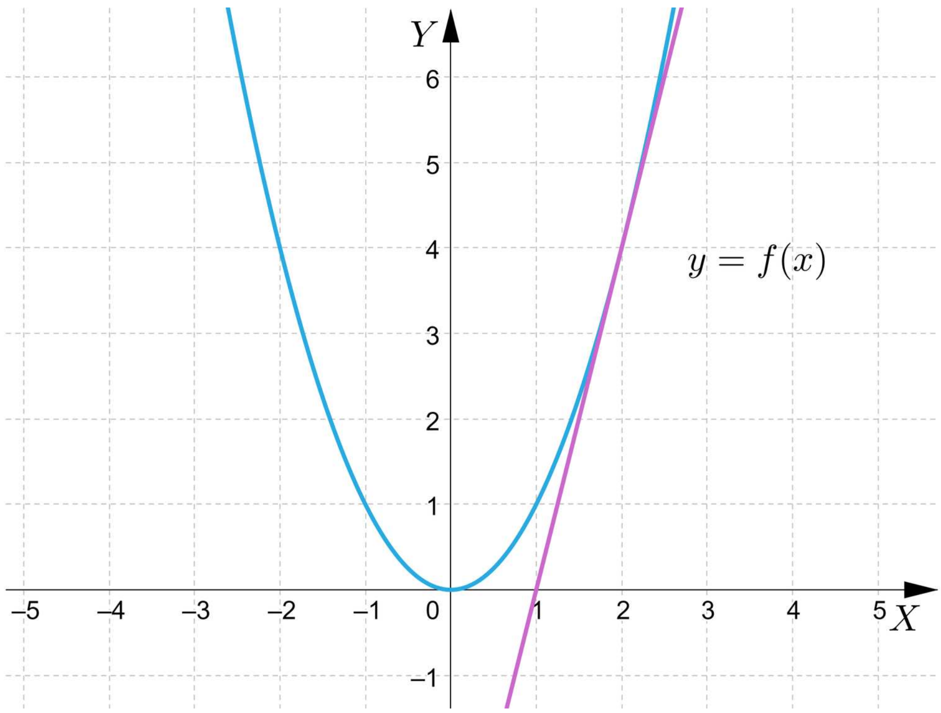
Wzór ogólny pochodnej funkcji f ma postać $f\prime(x) = 2x$, więc współczynnik kierunkowy prostej stycznej będzie równy $a = f\prime(x_0) = f(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Wzór prostej stycznej jest postaci $y = a(x - x_0) + y_0$, czyli w tym wypadku będzie to $y = 2 \cdot (x - 1) + 1$ albo po uproszczeniu $y = 2x - 1$.

Przykład 2

Wyznaczymy wzór stycznej do wykresu funkcji $y = x^2$ w punkcie $(2, 4)$.

Rozwiązanie

Wzór ogólny pochodnej funkcji f ma postać $f\prime(x) = 2x$, więc współczynnik kierunkowy prostej stycznej będzie równy $a = f\prime(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Wzór ogólny prostej stycznej jest postaci $y = a(x - x_0) + y_0$, czyli w tym wypadku będzie to $y = 4 \cdot (x - 2) + 4$ albo po uproszczeniu $y = 4x - 4$.



Wykres funkcji $y = x^2$ oraz stycznej w punkcie $(2, 4)$.

Przykład 3

Znajdziemy styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tak, by jej współczynnik kierunkowy był równy (-6).

Rozwiązanie

Możemy to zadanie rozwiązać graficznie, na przykład za pomocą apletu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3IFRbKUg

Spróbujmy to wykonać również algebraicznie.

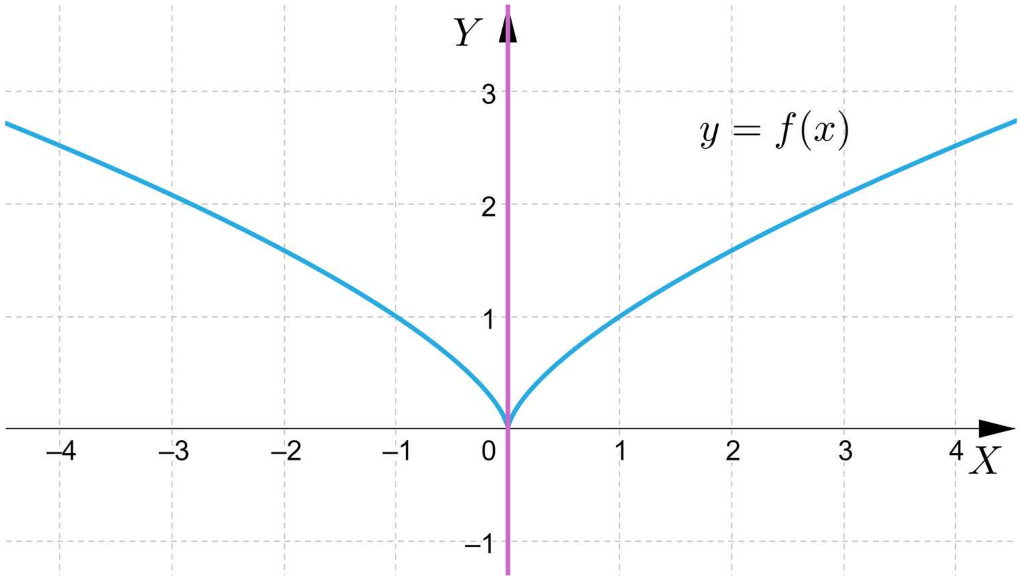
Współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie (x_0, y_0) jest równy $a = f\prime(x_0)$, musimy zatem znaleźć taką wartość x_0, żeby $a = -6$. Pochodna funkcji f jest postaci $f\prime(x) = 2x$, czyli otrzymujemy równość $2x_0 = -6$, której rozwiązaniem jest $x_0 = -3$, stąd: $y_0 = 9$.

Styczna w punkcie $(x_0, y_0) = (-3, 9)$ jest postaci $y = -6(x - (-3)) + 9$, po uproszczeniu $y = -6x - 9$.

Nie każda styczna do wykresu funkcji jest dana wzorem $y = ax + b$, szczególnie w przypadku funkcji ciągłych nieróżniczkowalnych w pojedynczym punkcie może mieć inną postać.

Przykład 4

Rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Jej pochodna jest równa $f\prime(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ i nie jest zdefiniowana dla $x = 0$. Zauważmy jednak, że blisko zera pochodne istnieją i dążą do nieskończoności, gdy się do zera zbliżamy, czyli w punktach blisko zera styczne istnieją i mają z jednej strony zera coraz mniejsze, z drugiej – coraz większe współczynniki kierunkowe, zatem są coraz bardziej pionowo nachylone. Pozwala nam to zgadnąć, że styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ jest prostą pionową, o wzorze $x = 0$.



Wykres funkcji nieróżniczkowalnej w punkcie z pionową styczną.

Przykład 5

Na koniec rozpatrzmy problem ruchu kuli, rzuconej przez kulomiota. Przed wyrzuceniem zawodnik obraca się z kulą przy szyi dookoła własnej osi, i kula zatacza okrąg. W momencie wypuszczenia kula będzie leciała w kierunku wskazanym przez prostą styczną do toru okręgu. Dla uproszczenia rozważań weźmiemy pod uwagę tylko górną połówkę okręgu, o promieniu równym 1, daną przez funkcję $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Jej pochodna jest równa $f\prime(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Wybierzmy punkt styczności (x_0, y_0), przy czym pamiętajmy, że leży on na naszym okręgu, czyli wiemy, że $y_0 = \sqrt{1 - {x_0}^2}$. Wstawiając do wzoru na pochodną funkcji otrzymujemy postać współczynnika kierunkowego stycznej, $a = f\prime(x_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2}} = \frac{-x_0}{y_0}$. Wstawiając wszystkie dane do wzoru ogólnego na prostą styczną $y = a \cdot (x - x_0) + y_0$, otrzymujemy

$y = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0,$

czyli

$y = \frac{-x_0(x - x_0) + {y_0}^2}{y_0},$

i dalej

$y = \frac{-x_0 \cdot x + {x_0}^2 + {y_0}^2}{y_0},$

więc ostatecznie

$y = \frac{1 - x_0 \cdot x}{y_0}$ albo $y = \frac{1 - x_0 \cdot x}{\sqrt{1 - {x_0}^2}}.$

Działanie naszego wzoru możemy obejrzeć w aplecie poniżej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3IFRbKUg

Słownik

styczna do krzywej

> prosta, która w małym otoczeniu tego punktu ma przebieg zbliżony do przebiegu krzywej, oraz ma w tym otoczeniu dokładnie jeden punkt wspólny z krzywą

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w filmie samouczku, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dhl1jDxZY

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej stycznej do krzywej.

Polecenie 2

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Polecenie 3

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - x$ jeżeli wiadomo, że ta styczna jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Styczna do krzywej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wzór stycznej do wykresu funkcji;
- znajduje styczne do wykresów wybranych funkcji elementarnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa kierowana;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie czytają część wprowadzającą lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej sekcję „Wprowadzenie”, omawia i komentuje z uczniami cele lekcji.
2. Nauczyciel prosi uczniów o streszczenie przeczytanego przed lekcją materiału, analizuje zagadnienie, rozpoznaje wiedzę uczniów dotyczącą własności pochodnych funkcji oraz funkcji liniowych.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej część „Wzór ogólny stycznej do wykresu funkcji” z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia ją na forum klasy.
2. Uczniowie w 3–4 osobowych grupach czytają pozostałą część sekcji „Przeczytaj”, tworzą mapę myśli na temat szukania stycznych do wykresów różnych klas funkcji. W przypadku powstania wątpliwości, nauczyciel wyjaśnia na forum całej klasy napotkany problem. Pod opieką prowadzącego uczniowie porównują wyniki pracy nad mapami myśli i omawiają powstałe różnice.
3. Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa:

Uczniowie zadają sobie nawzajem w ramach 3-4 osobowej grupy zadanie, analogiczne do jednego z ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Funkcja liniowa

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może zostać wykorzystany jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.