



Współrzędne wektora w układzie współrzędnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Współrzędne wektora w układzie współrzędnych

Źródło: Alex King, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

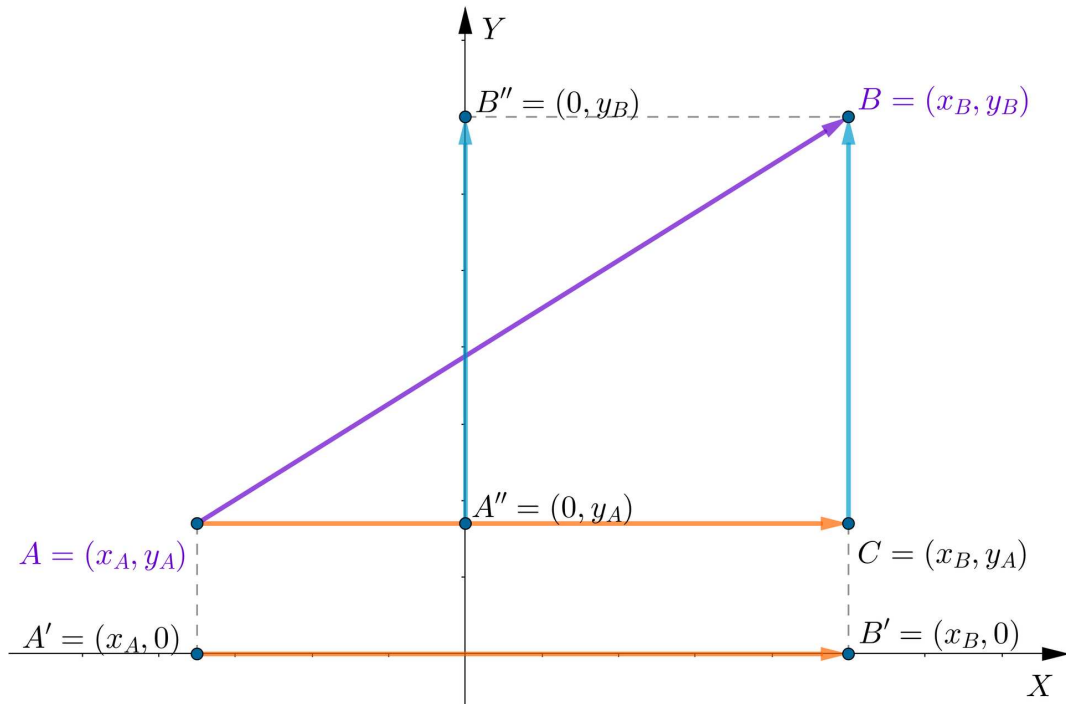
Wiesz już, że wektor można umieścić na osi liczbowej. Można mu wówczas przyporządkować współrzędną. Podobnie wygląda sytuacja, gdy wektor umieścimy w prostokątnym układzie współrzędnych. Ponieważ jednak układ na płaszczyźnie zbudowany jest z dwóch osi liczbowych, wektor w nim umieszczony będzie miał nie jedną, a dwie współrzędne.

Twoje cele

- Odczytasz współrzędne wektora swobodnego umieszczonego w układzie współrzędnych.
- Obliczysz współrzędne wektora w układzie współrzędnych, znając współrzędne jego początku i końca.

Przeczytaj

W prostokątnym układzie współrzędnych rozważmy wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$.

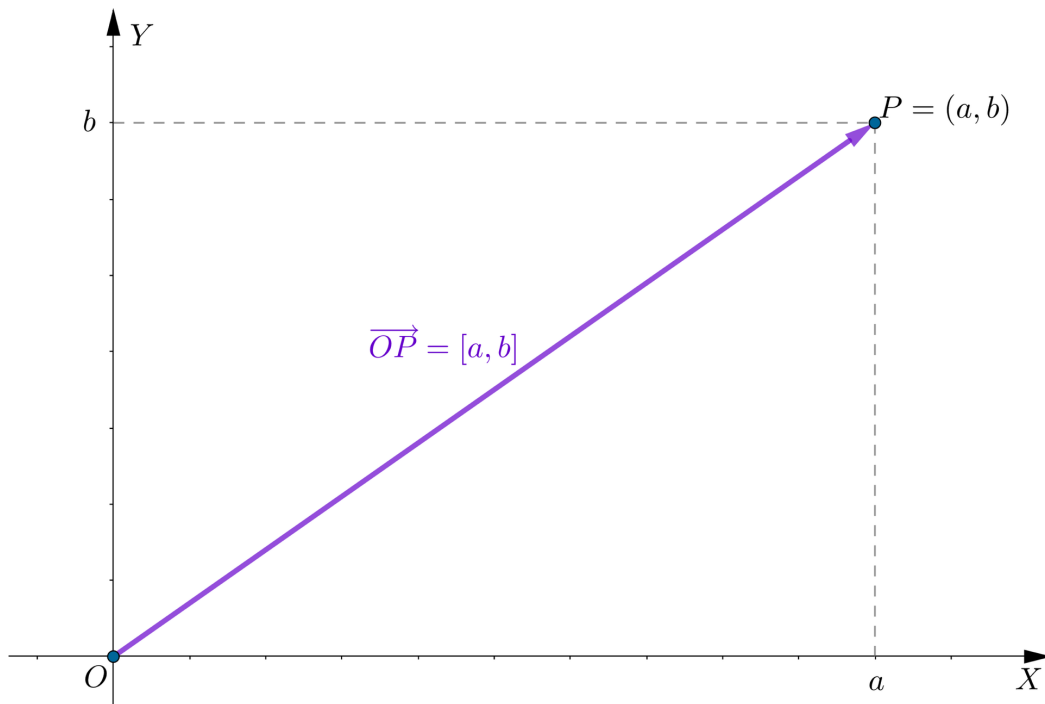


Przyjmując oznaczenia jak na rysunku powyżej, możemy zauważyć, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, gdzie wektor $\overrightarrow{AC}$ jest równoległy do osi X , zaś wektor $\overrightarrow{CB}$ jest równoległy do osi Y . Zrzutujemy teraz prostopadłe punkty A i B na osie układu. Otrzymamy wówczas punkty $A' = (x_A, 0)$, $B' = (x_B, 0)$, $A'' = (0, y_A)$, $B'' = (0, y_B)$. Ponieważ $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{A''B''}$ są wektorami na osiach, więc ich współrzędne są równe $\overrightarrow{A'B'} = [x_B - x_A]$ i $\overrightarrow{A''B''} = [y_B - y_A]$. Możemy ponadto zauważyć, że $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A''B''}$, czyli $\overrightarrow{AC} = [x_B - x_A]$, $\overrightarrow{CB} = [y_B - y_A]$. Liczby te przyporządkowujemy wektorowi $\overrightarrow{AC}$ jako jego współrzędne w układzie współrzędnych.

Definicja: współrzędne wektora w układzie współrzędnych

Jeśli $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, to **współzrędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ w układzie współrzędnych** nazywamy liczby $x_B - x_A$ i $y_B - y_A$, co zapisujemy $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli początek danego wektora znajduje się w początku układu współrzędnych, to współrzędne końca tego wektora są równe współzrędnym wektora.



Ponadto współrzędne wektora zerowego są zerami: $\vec{0} = [0, 0]$.

Przykład 1

Dane są punkty: $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$, $C = (3, -4)$. Wyznamy współrzędne wektorów:

$$\vec{AB} = [-2 - 1, 3 - 2] = [-3, 1]$$

$$\vec{BC} = [3 - (-2), -4 - 3] = [5, -7]$$

$$\vec{AC} = [3 - 1, -4 - 2] = [2, -6]$$

Przykład 2

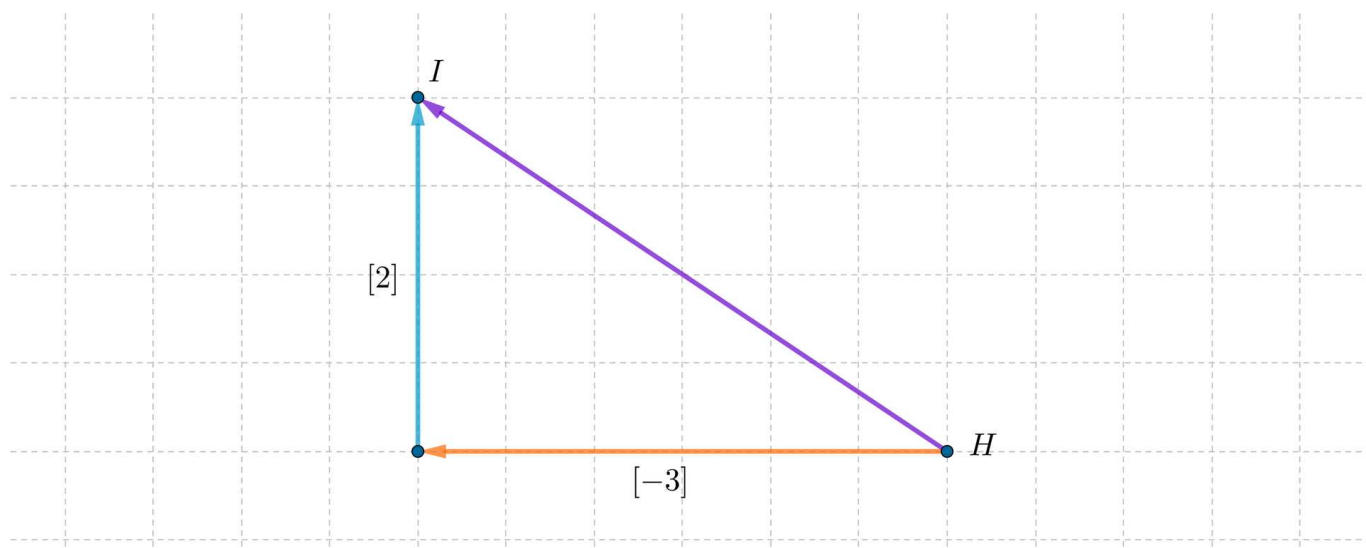
Wyznamy wartość parametru m tak, aby wektor $\vec{AB}$ miał współrzędne $[m - 1, -7]$, gdzie $A = (2m - 2, 7)$, $B = (4m, 0)$.

Zgodnie z definicją współrzędnych wektora są one równe różnicy współrzędnych końca i początku, czyli $[4m - (2m - 2), 0 - 7] = [2m + 2, -7]$. Z warunków zadania otrzymane współrzędne mają być równe $[m - 1, -7]$. Drugie współrzędne są równe dla każdej wartości parametru m , zaś z równości pierwszych współrzędnych wynika równanie:

$$2m + 2 = m - 1 \quad m = -3$$

Zatem warunki zadania spełnia $m = -3$.

Poczyńmy jeszcze tylko jedno spostrzeżenie: **współrzędne wektora** to “instrukcja”, jak się poruszać, żeby dostać się z początku tego wektora do jego końca. Pierwsza współrzędna określa przemieszczenie w poziomie (jeśli jest dodatnia, to ruch wykonujemy w prawo, jeśli ujemna - w lewo), druga - w pionie (jeśli jest dodatnia, to ruch wykonujemy w górę, jeśli ujemna - w dół). Na przykład współrzędne $\overrightarrow{HI} = [-3, 2]$ oznaczają, że aby przemieścić się z punktu H do punktu I , wystarczy poruszyć się o 3 jednostki w lewo i 2 jednostki do góry.



Słownik

współrzędne wektora w układzie współrzędnych

liczby równe różnicom współrzędnych końca i początku wektora; dla punktów

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są równe $[x_B - x_A, y_B - y_A]$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi na filmie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5uX6bUyF>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący wektorów.

Polecenie 2

Oblicz współrzędne wektora o początku w punkcie $C = (-4, -3)$ i końcu w punkcie $D = (-6, 4)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Połącz w pary punkty A i B , będące początkiem i końcem wektora $\overrightarrow{AB}$ z jego współrzędnymi.

$$A = (5, 5), B = (2, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -3, -9 \end{bmatrix}$$

$$A = (4, -2), B = (7, 7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4, 6 \end{bmatrix}$$

$$A = (1, -2), B = (-3, 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4, -6 \end{bmatrix}$$

$$A = (-1, 2), B = (3, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3, 9 \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 4



Dane są współrzędne wektora i jego początku. Znajdź współrzędne końca. Rozwiąż test.

Współrzędne wektora i jego początku		
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2, 3 \end{bmatrix}, A = (1, 2)$	$B = (5, 3) \quad \bigcirc$	$B = (3, 5) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -4, -3 \end{bmatrix}, A = (4, -3)$	$B = (0, -6) \quad \bigcirc$	$B = (-8, 0) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -7, 3 \end{bmatrix}, A = (-5, -6)$	$B = (-3, -12) \quad \bigcirc$	$B = (-12, -3) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5, -4 \end{bmatrix}, A = (-3, 5)$	$B = (2, 1) \quad \bigcirc$	$B = (8, -9) \quad \bigcirc$

Ćwiczenie 5



Dane są współrzędne wektora i jego końca. Znajdź współrzędne początku. Rozwiąż test.

Współrzędne wektora i jego początku		
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5, 6 \end{bmatrix}, B = (1, 1)$	$A = (-5, -4) \quad \bigcirc$	$A = (-4, -5) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -3, 2 \end{bmatrix}, B = (2, 3)$	$A = (5, 1) \quad \bigcirc$	$A = (-1, 1) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2, -3 \end{bmatrix}, B = (-3, -4)$	$A = (-1, -7) \quad \bigcirc$	$A = (-5, -1) \quad \bigcirc$
$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -6, 3 \end{bmatrix}, B = (-3, 11)$	$A = (-9, 14) \quad \bigcirc$	$A = (3, 8) \quad \bigcirc$

Ćwiczenie 6



Poniżej podano współrzędne wektora oraz jego początku i końca. Wyznacz wartość parametru m w każdym z przypadków.

Współrzędne wektora	Współrzędne punktów A i B	Wartość parametru m
$\overrightarrow{AB} = [2m - 1; 5]$	$A = (3, -2), B = (m, 3)$	
$\overrightarrow{AB} = [2 - 2m; 0]$	$A = (-2, 1), B = (1 - m, 1)$	
$\overrightarrow{AB} = [2 - 2m; -6]$	$A = (3m - 1, 5), B = (2, -1)$	
$\overrightarrow{AB} = [-3m; -2]$	$A = (5m - 3, -2), B = (3, -4)$	

Ćwiczenie 7



Poniżej podano współrzędne wektora oraz jego początku i końca. Wyznacz wartość parametru m w każdym z przypadków.

Współrzędne wektora	Współrzędne punktów A i B	Wartość parametru m
$\overrightarrow{AB} = [m^2; m]$	$A = (3, -2), B = (4, -3)$	
$\overrightarrow{AB} = [m^2; m]$	$A = (1, 2m), B = (10, 9)$	
$\overrightarrow{AB} = [2m; m]$	$A = (0, 1), B = (m^2, 3)$	
$\overrightarrow{AB} = [-3m; 0]$	$A = (m^2, 3), B = (0, m)$	

Ćwiczenie 8



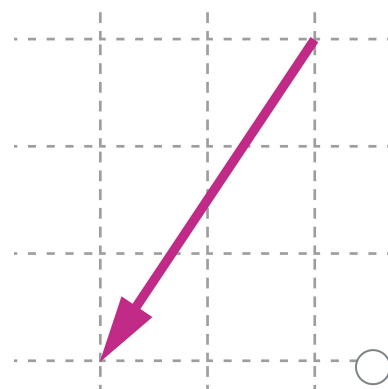
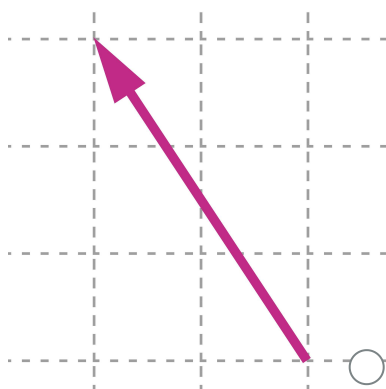
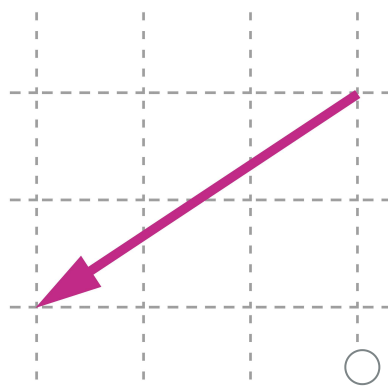
Poniżej podano współrzędne wektora oraz jego początku, końca. Wyznacz wartości parametrów m i k w każdym z przypadków.

Współrzędne wektora	Współrzędne punktów A i B	Wartość parametru m	Wartość parametru k
$\vec{AB} = [3m - 1; 2k + 5]$	$A = (3, -k), B = (m, 3)$		
$\vec{AB} = [1 - 2m; 1 - 3k]$	$A = (-1, 1 + 2k), B = (1 - m, 1)$		
$\vec{AB} = [4; -6]$	$A = (k, -m), B = (m, k)$		
$\vec{AB} = [6; 9]$	$A = (m - k, -k), B = (k, m)$		

Ćwiczenie 9



Wskaż wektor o współrzędnych $[-2, -3]$.



Ćwiczenie 10



Wskaż poprawne dokończenie zdania.

Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [6; 9]$ i punkt $A = (2, 4)$. Punkt B ma współrzędne	Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [-5; 8]$ i punkt $B = (2, 4)$. Punkt A ma współrzędne	Dane są wektor $\overrightarrow{AB} = [m + 6; -m - k]$ oraz punkty $A = (m, -6 + k)$ i $B = (3k - 6, m)$. Wartości parametrów m i k są równe:
$(-4, -5)$ ☐	$(12, -3)$ ☐	$k = 2, m = -3$ ☐
$(-5, -4)$ ☐	$(7, -4)$ ☐	$k = -3, m = 2$ ☐
$(8, 13)$ ☐	$(-3, 12)$ ☐	$k = 3, m = -2$ ☐

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Współrzędne wektora w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

- Odczytasz współrzędne wektora swobodnego umieszczonego w układzie współrzędnych.
- Obliczysz współrzędne wektora w układzie współrzędnych, znając współrzędne jego początku i końca.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Współrzędne wektora w układzie współrzędnych” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
2. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

- [Przesunięcie punktu w układzie współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Współrzędne wektora w układzie współrzędnych”.