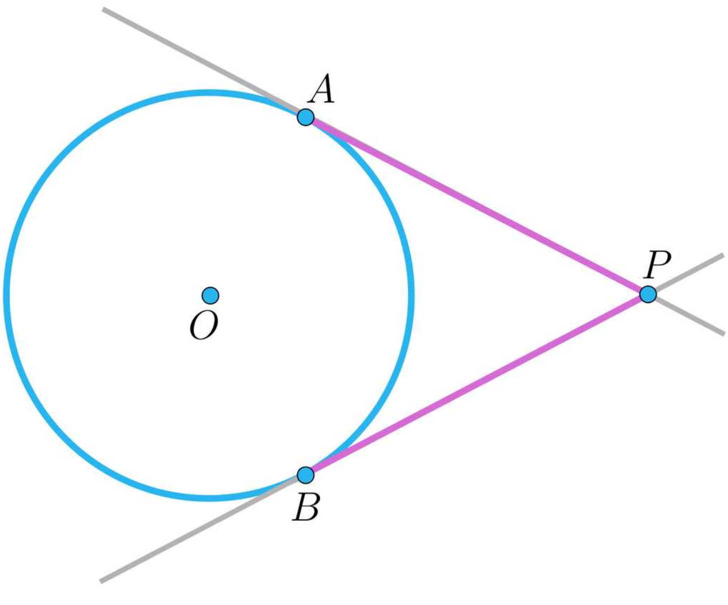
Zastosowanie twierdzenia o odcinkach stycznych

Zastosowanie twierdzenia o odcinkach stycznych

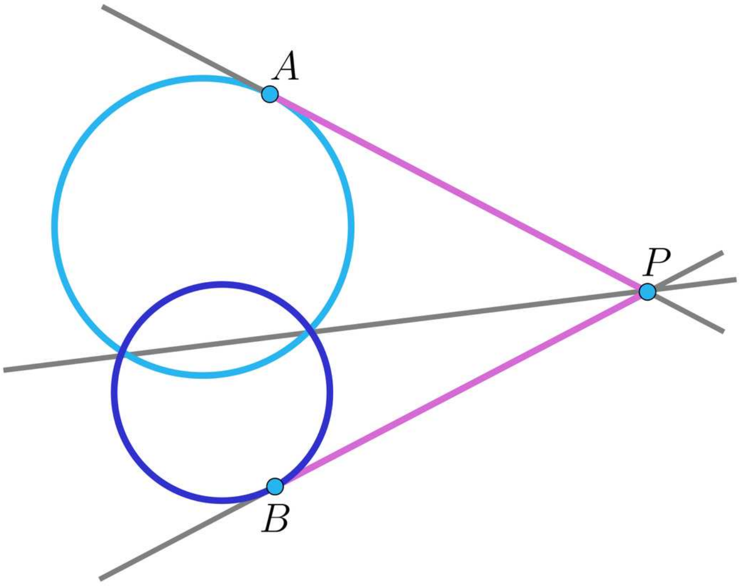
Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

O równości odcinków stycznych

Pod nazwą „zasadnicze twierdzenie planimetrii” kryje się teza o równości odcinków dwóch stycznych do danego okręgu, poprowadzonych z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu, wyznaczonych przez ten punkt i punkty styczności A i B, jak na rysunku.



Mniej oczywista jest równość odcinków AP i BP, wyznaczonych na stycznych do dwóch przecinających się okręgów, jak na poniższym rysunku.



Odcinki stycznych

Oczywiście znaczenie ma fakt, że punkt, z którego prowadzone są styczne, leży na siecznej tych okręgów, przechodzącej przez ich punkty wspólne.

Dowód tego faktu i innych mniej lub bardziej oczywistych zależności będzie celem niniejszej lekcji.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz twierdzenie o odcinkach stycznych.
> - Poznasz pojęcie potęgi punktu względem okręgu.
> - Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

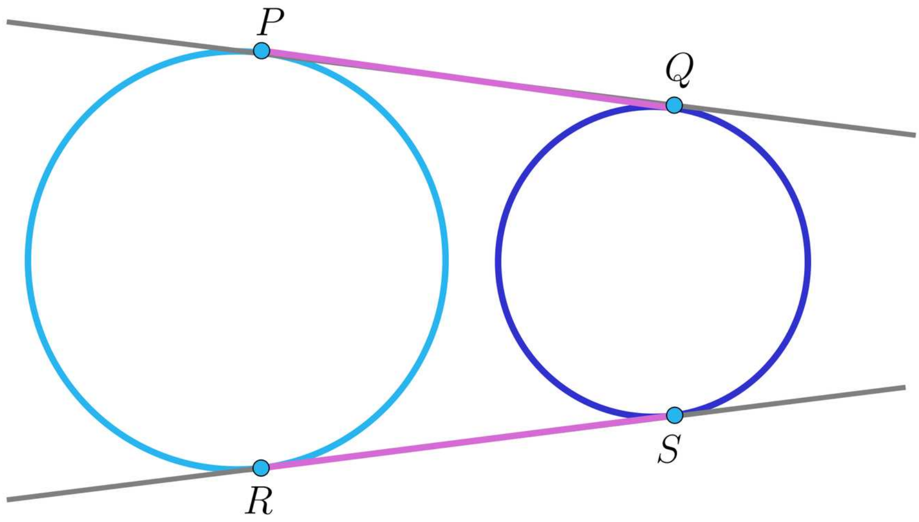
Przeczytaj

Zastosowanie twierdzenia o odcinkach stycznych

Rozważania zaczniemy od prostej konsekwencji zasadniczego twierdzenia planimetrii, z której będziemy korzystać przy rozwiązywaniu kolejnych problemów.

Twierdzenie: O stycznych do dwóch okręgów

Niech PQ i RS będą odcinkami wyznaczonymi przez punkty, w których dwa okręgi są odpowiednio styczne do ich wspólnych stycznych zewnętrznych, jak na rysunku.



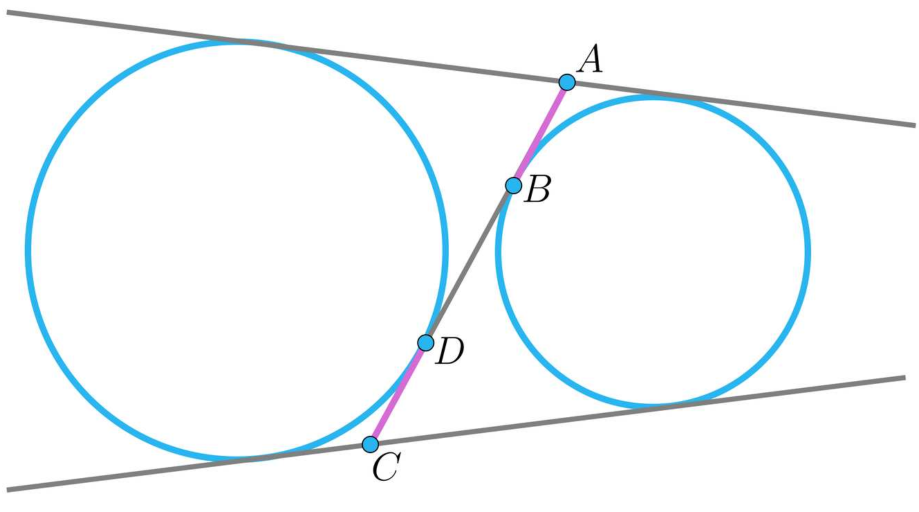
Wtedy $|PQ| = |RS|$.

Dowód

Zauważmy, że w przypadku równości promieni, wspólne styczne zewnętrzne obu okręgów byłyby równoległe, a czworokąt $PRSQ$ byłby prostokątem. Teza twierdzenia byłaby wówczas oczywista. Przypuśćmy więc, że promienie są różne. Wtedy proste PQ i RS przetną się – ich punkt wspólny oznaczmy przez M. Nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć (jak sugeruje rysunek), że punkt Q leży pomiędzy punktami P i M. Wtedy $|MP| = |MQ| + |PQ|$ oraz $|MR| = |MS| + |RS|$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|MQ| = |MS|$ oraz $|MP| = |MR|$. Stąd
$|MS| + |RS| = |MR| = |MP| = |MQ| + |PQ| = |MS| + |PQ|$, zatem $|PQ| = |RS|$.

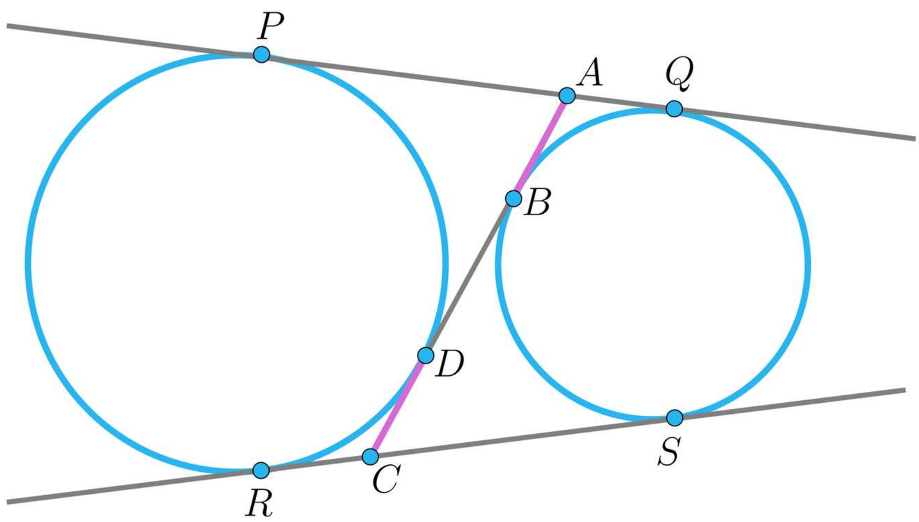
Przykład 1

Rozważmy dwa okręgi. Punkty A i C leżą odpowiednio na jednej z dwóch wspólnych stycznych zewnętrznych do tych okręgów, w taki sposób, że odcinek AC jest zawarty w jednej ze wspólnych stycznych wewnętrznych do tych okręgów, jak na rysunku.



Pokażemy, że $|AB| = |CD|$.

W tym celu zaznaczymy odpowiednio punkty styczności.

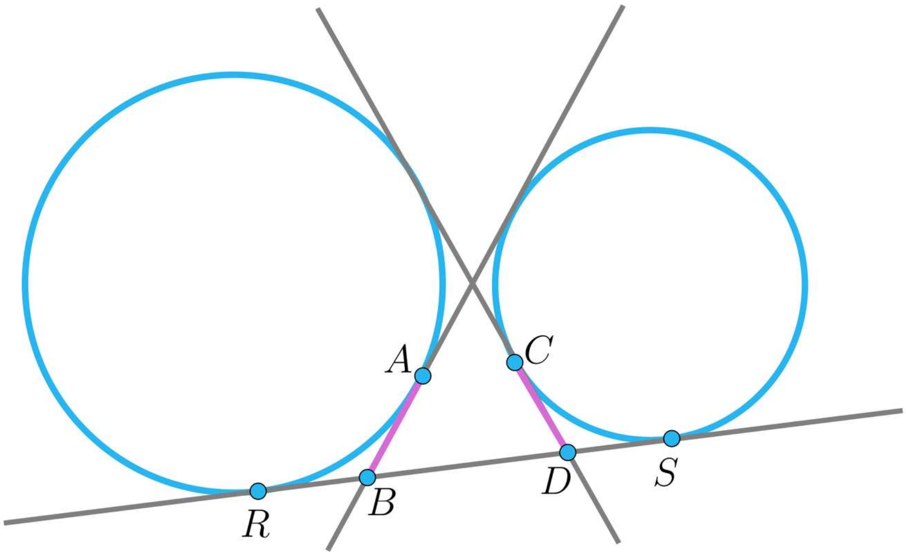


Dowód równości odcinków stycznych

Z wcześniejszego twierdzenia wynika, że $|PQ| = |RS|$, czyli $|AP| + |AQ| = |CS| + |CR|$. Ale z twierdzenia o odcinkach stycznych (zasadniczego twierdzenia planimetrii) otrzymujemy w szczególności, że $|RC| = |CD|$, $|CS| = |CB|$, $|AQ| = |AB|$ oraz $|AP| = |AD|$. Stąd, wynikającą z twierdzenia o stycznych do dwóch okręgów równość możemy zapisać w postaci $|AD| + |AB| = |CB| + |CD|$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że $|CB| = |CD| + |BD|$ oraz $|AD| = |AB| + |BD|$, zatem równość $|AD| + |AB| = |CB| + |CD|$ przyjmuje postać $|AB| + |BD| + |AB| = |CD| + |BD| + |CD|$. Stąd $2|AB| = 2|CD|$, czyli $|AB| = |CD|$.

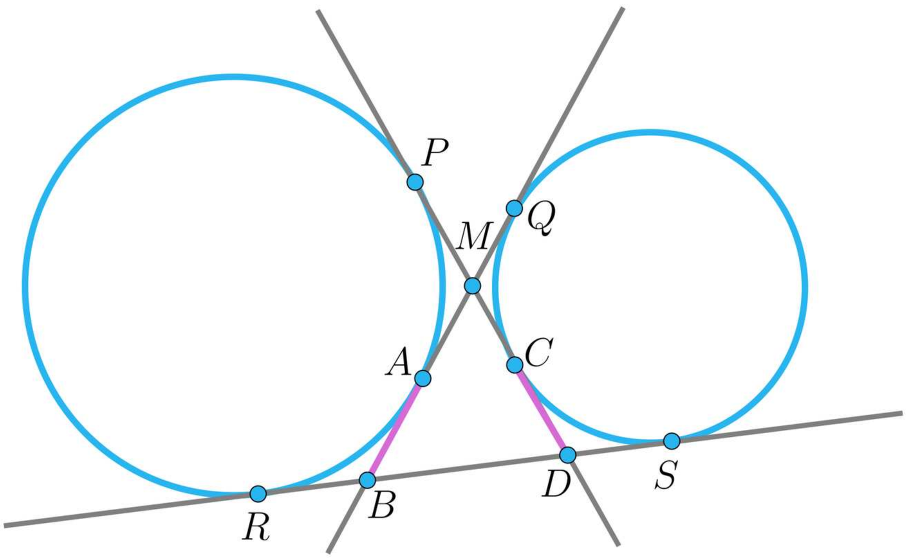
Przykład 2

Rozważmy dwa okręgi. Każdy z punktów A i C leży na innej z dwóch wspólnych stycznych wewnętrznych do tych okręgów, które to styczne przecinają wspólną styczną zewnętrzną RS w punktach odpowiednio B i D, jak na rysunku.



Pokażemy, że $|AB| = |CD|$.

Podobnie, jak w Przykładzie 1. zaczniemy od oznaczenia widocznych na rysunku punktów styczności i punktu M– wspólnego dla stycznych wewnętrznych.



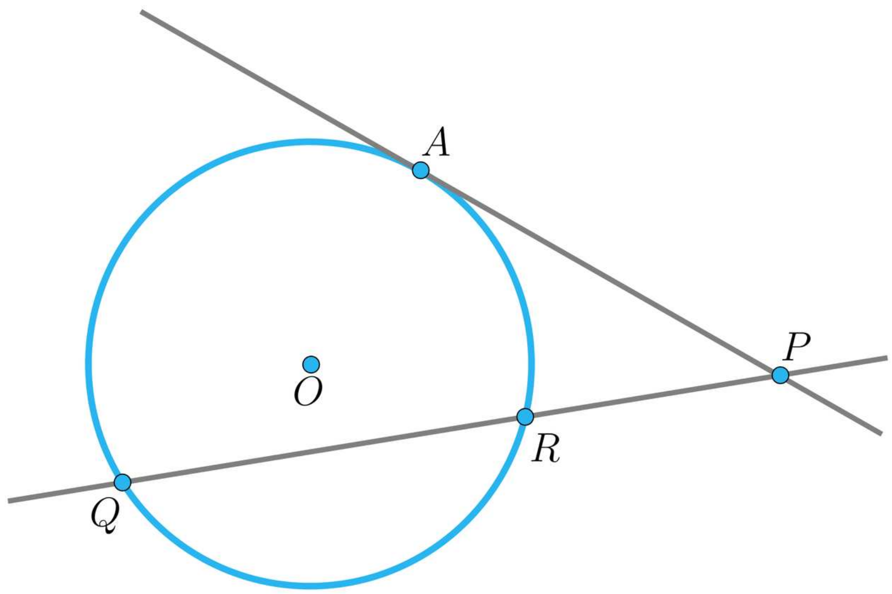
Dowód równości odcinków stycznych.

Mamy wówczas, że $|DP| = |CD| + |CM| + |MP|$ oraz $|DR| = |BD| + |BR|$. Podobnie $|BQ| = |AB| + |AM| + |MQ|$ oraz $|BS| = |BD| + |DS|$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych poprowadzonych z punktu D oraz z punktu B otrzymujemy w szczególności, że $|CD| + |CM| + |MP| = |BD| + |BR|$ oraz $|AB| + |AM| + |MQ| = |BD| + |DS|$.

> Odejmując stronami ostatnie równości dostajemy, że
> $|CD| + |CM| + |MP| - (|AB| + |AM| + |MQ|) = |BD| + |BR| - (|BD| + |DS|)$.
> Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy ponadto, że $|PM| = |AM|$, $|CM| = |MQ|$, $|BR| = |AB|$ oraz $|DS| = |CD|$, zatem powyższa równość przyjmuje postać
> $|CD| + |MQ| + |AM| - (|AB| + |AM| + |MQ|) = |BD| + |AB| - (|BD| + |CD|)$. Po uproszczeniu i redukcji wyrazów podobnych mamy $|CD| - |AB| = |AB| - |CD|$, czyli $2|AB| = 2|CD|$, a stąd $|AB| = |CD|$.

Potęga punktu względem okręgu

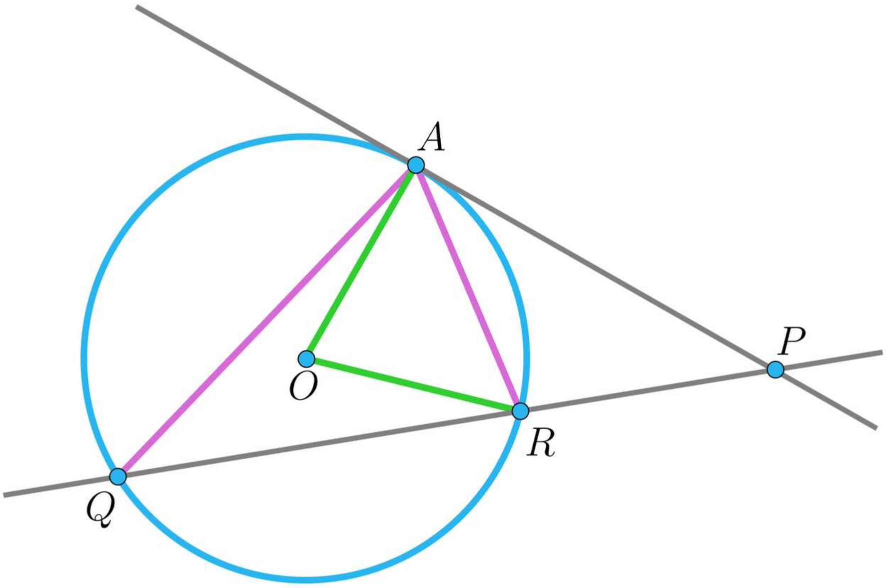
Rozważmy okrąg o środku w punkcie O i punkt P leżący na zewnątrz okręgu. Z tego punktu poprowadźmy styczną oraz sieczną tego okręgu, jak na rysunku.



Styczna i sieczna

Niech A będzie punktem styczności, a Q, R będą punktami, w których sieczna przecina dany okrąg. Okazuje się, że $|PQ| \cdot |PR| = |PA|^2$ niezależnie od wyboru siecznej.

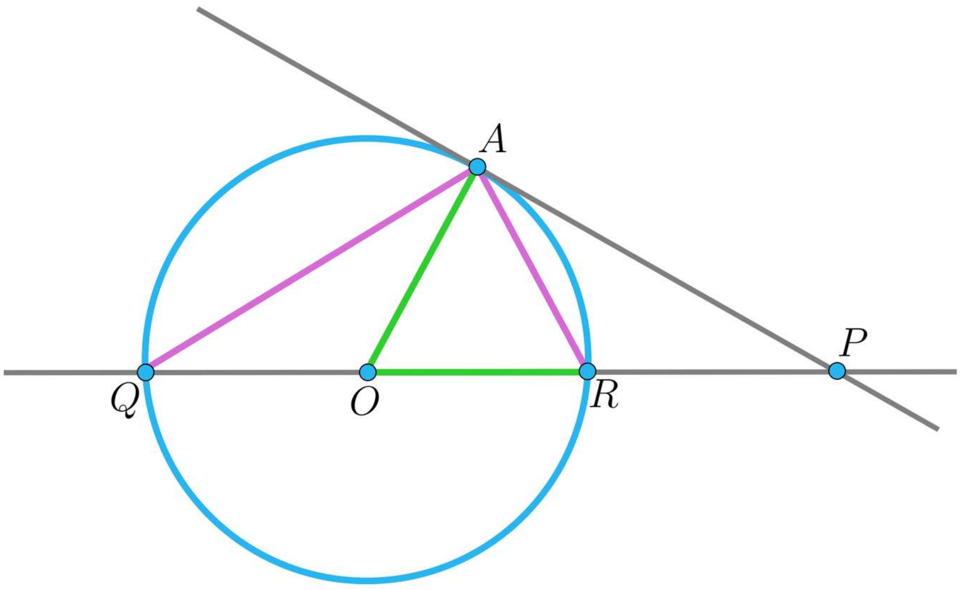
Dla dowodu pokażemy, że trójkąty PRA i PAQ są podobne. Skorzystamy w tym celu z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku i z faktu, że promień OA jest prostopadły do stycznej AP.



Styczna i sieczna dowód

Oznaczmy $|\measuredangle PQA| = \alpha$. Wtedy $|\measuredangle AOR| = 2\alpha$ oraz $|\measuredangle RAP| = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$. Ale to oznacza, na mocy cechy kkk podobieństwa trójkątów, że trójkąty PRA i PAQ są podobne. Stąd, w szczególności $\frac{|AP|}{|PR|} = \frac{|PQ|}{|AP|}$, czyli $|PQ| \cdot |PR| = |PA|^2$.

Otrzymana zależność, która w programach szkolnych nosi nazwę twierdzenia o odcinkach stycznej i siecznej, jest szczególnym przypadkiem szerszego zagadnienia zwanego pod nazwą potęgi punktu względem okręgu. Aby je wprowadzić, wróćmy do naszego zagadnienia stycznej i siecznej, ale rozważmy sieczną, która zawiera średnicę okręgu, jak na rysunku.



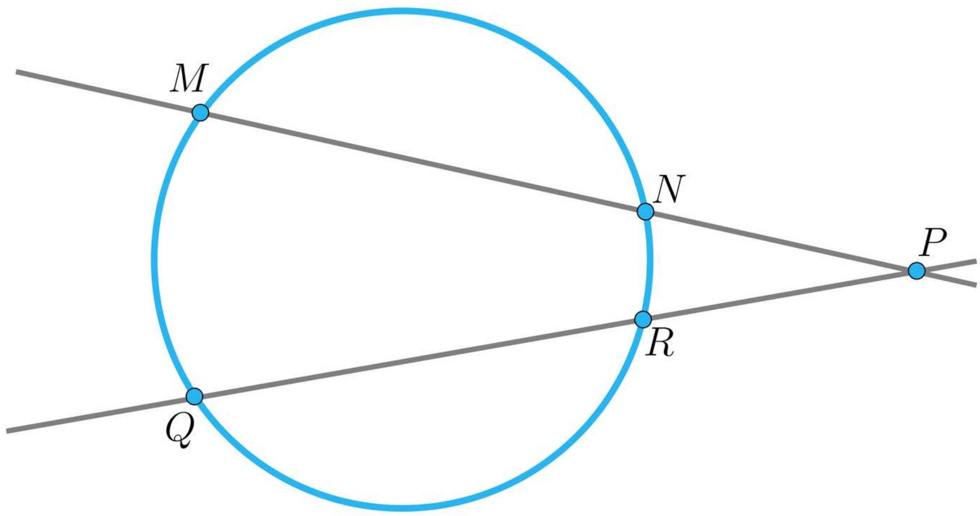
Potęga punktu względem okręgu

Oznaczmy przez r promień danego okręgu, a przez d oznaczmy odległość $|OP|$ punktu P od środka okręgu.

Wtedy $|PQ| \cdot |PR| = |PA|^2 = d^2 - r^2$. Dla danego okręgu i danego punktu wielkość $d^2 - r^2$ nazywamy potęgą punktu względem okręgu.

Okazuje się, że pojęcie potęgi punktu względem okręgu można uogólnić na punkty leżące na okręgu (wówczas potęga jest równa 0) oraz punkty wewnętrzne okręgu (potęga jest wtedy ujemna). Przydatne jest operowanie także pojęciem prostej potęgowej, która została pośrednio zdefiniowana w ćwiczeniach do niniejszej lekcji.

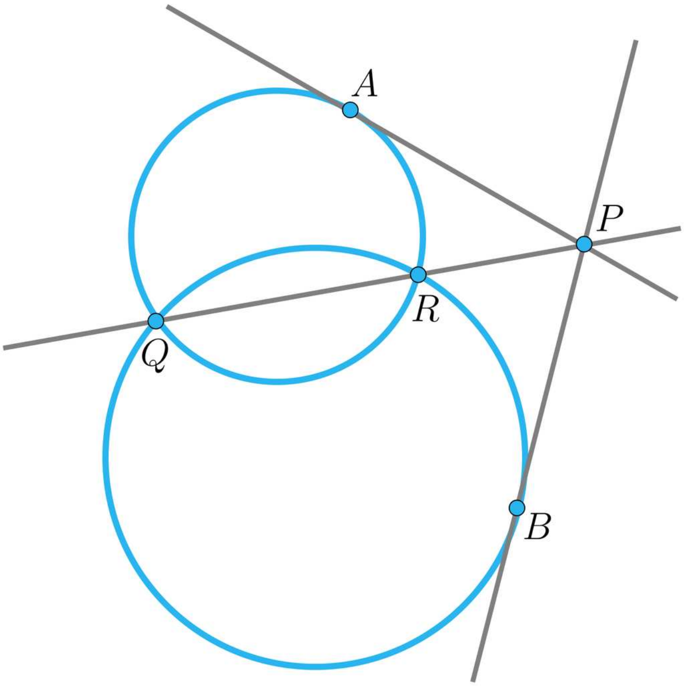
Pozostaje zapisać prosty wniosek, dotyczący różnych siecznych. Niech Q, R oraz M, N będą punktami, w których dwie różne sieczne przecinają odpowiednio dany okrąg, jak na rysunku.



Dwie sieczne.

Wtedy $|PQ| \cdot |PR| = |PM| \cdot |PN|$.

Wróćmy teraz do zagadnienia ze wstępu do niniejszej lekcji. Pokażemy równość odcinków AP i BP, wyznaczonych na stycznych do dwóch przecinających się okręgów, jak na poniższym rysunku



Zastosowanie potęgi punktu względem okręgu.

Zauważmy, że $|PQ| \cdot |PR| = |PA|^2$ oraz $|PQ| \cdot |PR| = |PB|^2$. Stąd wynika równość $|PA|^2 = |PB|^2$ i postawiona teza.

Słowniczek

> **prosta potęgowa**
>
> dla niewspółśrodkowych okręgów zbiorem punktów, dla których ich potęga względem obu okręgów jest taka sama, jest prosta, którą nazywamy prostą potęgową lub osią potęgową

> **potęga punktu względem okręgu**
>
> dla danego punktu P i dla danego okręgu o środku w punkcie O i promieniu r wyrażenie $|PO|^2 - r^2$ nazywamy potęgą tego punktu względem danego okręgu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowania twierdzenia o odcinkach stycznych przedstawionymi w animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DQNMfg8lk

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący zastosowania twierdzenia o odcinkach stycznych.

Polecenie 2

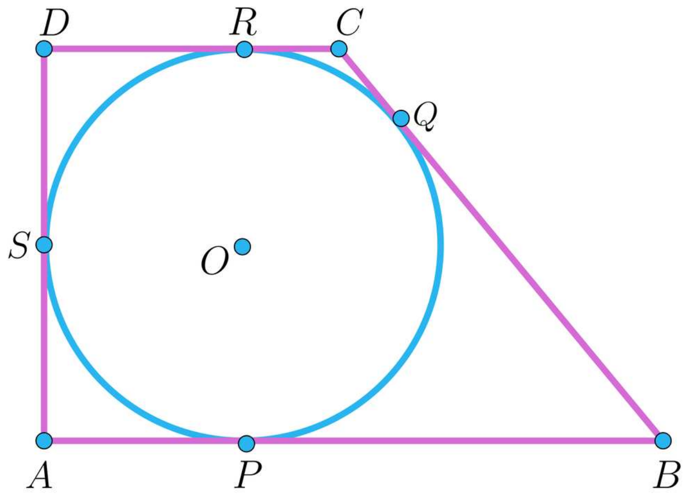
Dany jest trójkąt o bokach: 3, 4, 5. Wyznacz długości odcinków, na jakie boki trójkąta zostały podzielone przez punkty, w których okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do jego boków.

Polecenie 3

Przez punkty A, B poprowadzono styczne do danego okręgu, które przecięły się w punkcie P. Wyznacz długość promienia tego okręgu, jeśli $|AP| = 4$ oraz $|\sphericalangle APB| = 45^\circ$.

Polecenie 4

W trapez prostokątny $ABCD$ o krótszej podstawie CD równej 3 wpisano okrąg o promieniu 2, styczny do odpowiednich ramion trapezu w punktach P, Q, R, S, jak na rysunku.



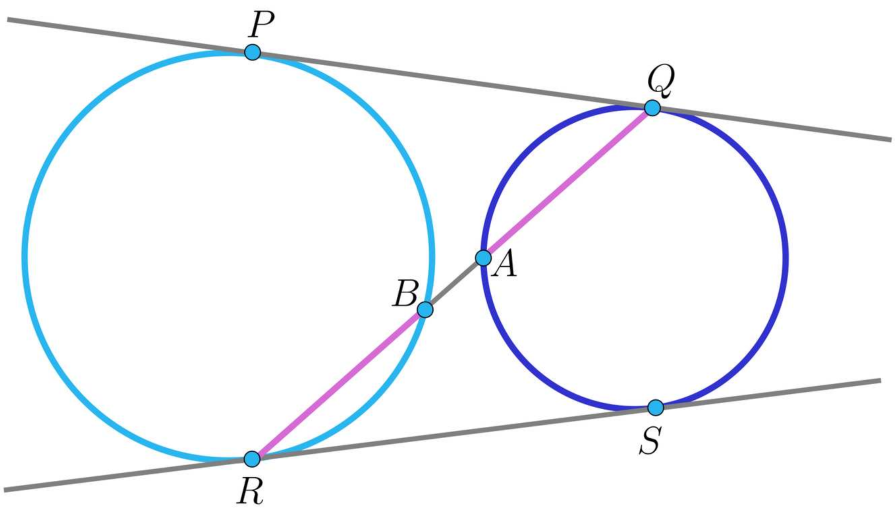
Wyznacz różnicę długości $|BQ| - |CQ|$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

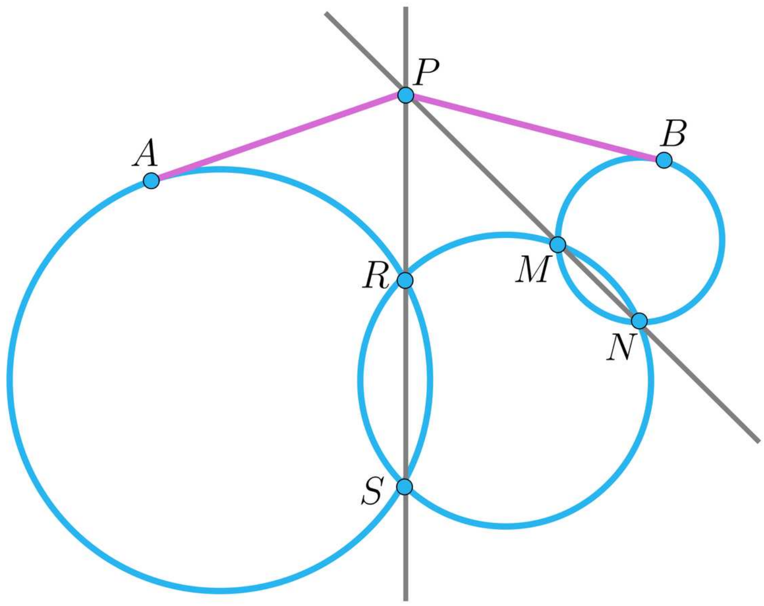
Rozważmy dwa okręgi. Pary punktów P, Q oraz R, S leżą odpowiednio na dwóch wspólnych stycznych zewnętrznych do tych okręgów, jak na rysunku.



Przez punkty Q i R poprowadzono prostą, która przecięła te okręgi odpowiednio w punktach A i B. Wykaż, że $|AQ| = |BR|$.

Ćwiczenie 2

Wykaż równość odcinków AP i BP, wyznaczonych na stycznych do trzech przecinających się okręgów, poprowadzonych z punktu przecięcia się dwóch siecznych RS i MN, jak na poniższym rysunku.



Ćwiczenie 3

Dane są dwa okręgi: o środku S_1 i promieniu r oraz o środku S_2 i promieniu R takie, że odległość ich środków jest równa D. Na prostej łączącej środki obu tych okręgów leży taki punkt P, dla którego potęga względem obu okręgów jest równa. Wyznacz odległość d punktu P od środka S_1.

Ćwiczenie 4

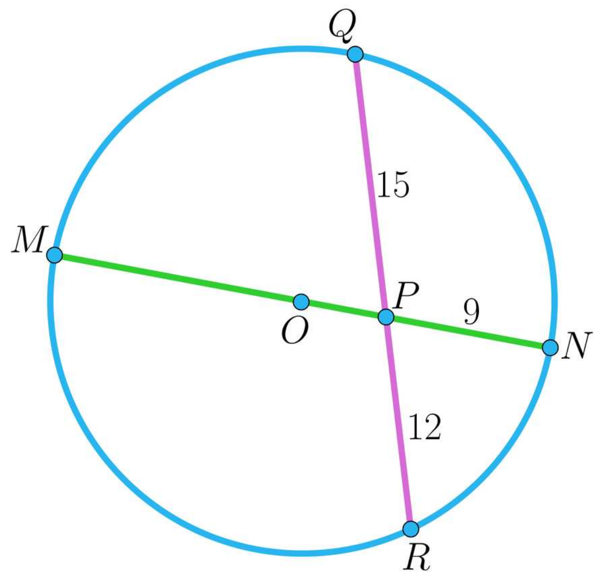
Rozważmy dwa okręgi: o środkach w punktach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio r i R . Niech P będzie punktem leżącym na prostej S_1S_2, dla którego potęga względem obu okręgów jest taka sama. Wykaż, że dla każdego punktu leżącego na prostopadłej do prostej S_1S_2 i przechodzącej przez punkt P, potęga względem obu okręgów jest równa

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

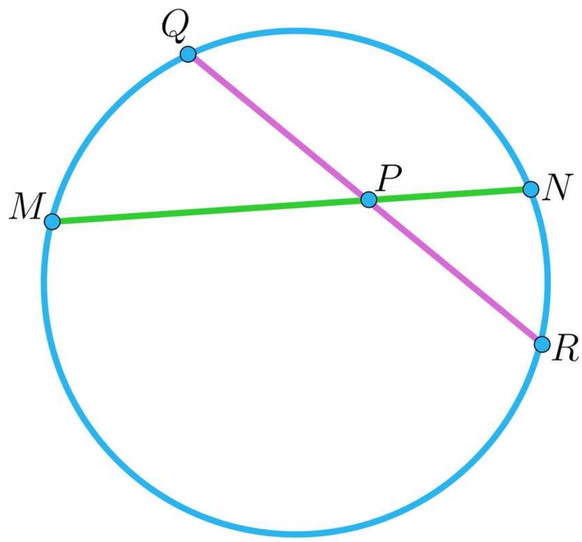
Punkt O jest środkiem okręgu, w którym $|PR| = 12$, $|PN| = 9$, $|PQ| = 15$, jak na rysunku.



Promień tego okręgu jest równy

Ćwiczenie 8

Niech P będzie punktem wspólnym cięciw MN i QR danego okręgu, jak na rysunku



Uzasadnij, że $|PM| \cdot |PN| = |PQ| \cdot |PR|$.

Ułóż w kolejności etapy dowodu.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie twierdzenia o odcinkach stycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych

12) przeprowadza dowody geometryczne

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje zasadnicze twierdzenie planimetrii
- przeprowadza dowód twierdzenia o odcinkach stycznej i siecznej
- wykorzystuje zasadnicze twierdzenie planimetrii do badania związków miarowych w trójkącie i dowodzenia twierdzeń
- zna pojęcie potęgi punktu względem okręgu i prostej potęgowej
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie zasadniczego twierdzenia planimetrii. Następnie prezentuje na rysunku lub modelu przygotowanym w aplecie problem równości odcinków stycznych poprowadzonych do dwóch okręgów z punktu leżącego na ich wspólnej siecznej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje model dwóch stycznych zewnętrznych do dwóch okręgów i prosi uczniów o sformułowanie hipotezy dotyczącej długości odpowiednich odcinków tych stycznych. Następnie prosi o przeprowadzenie dowodu – wybrany uczeń przeprowadza dowód na tablicy.
2. Nauczyciel formułuje kolejno dwa problemy, opisane w Przykładzie 1. i Przykładzie 2. Uczniowie, pod kierunkiem nauczyciela rozwiązują problemy. Nauczyciel może podjąć decyzję, by jeden z przykładów zaproponować do samodzielnego rozwiązania w domu.
3. Nauczyciel poleca uruchomić animację i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
4. Nauczyciel formułuje twierdzenie o odcinkach stycznej i siecznej. Uczniowie przeprowadzają dowód i formułują wnioski – w szczególności dotyczące odpowiednich równości w przypadku wielu siecznych.
5. Nauczyciel wprowadza pojęcie potęgi punktu względem prostej.
6. Na zakończenie uczniowie, pod kierunkiem nauczyciela, rozwiązują problem równości odpowiednich odcinków stycznych, zaprezentowany na wstępie lekcji.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Ewentualnie może prosić o dokończenie dowodu twierdzenia.

Materiały pomocnicze:

Styczna do okręgu

Wskazówki metodyczne:

Animację można obejrzeć w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można go również wykorzystać przy realizacji tematu o okręgu opisanym na trójkącie.