



Liczba elementów zbioru skończonego – reguła mnożenia

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba elementów zbioru skończonego – reguła mnożenia

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W prostokątnym układzie współrzędnych XOY rozpatrujemy wszystkie punkty (x_i, y_j) , których obie współrzędne są całkowite oraz $2 \leq x_i \leq 11$ i $4 \leq y_j \leq 10$.

Ponieważ:

- $x_i \in \{2, 3, 4, \dots, 11\}$, więc pierwszą współrzędną rozpatrywanego punktu możemy zapisać na 10 sposobów,
- $y_j \in \{4, 5, 6, \dots, 10\}$, więc drugą współrzędną rozpatrywanego punktu możemy zapisać na 7 sposobów.

Wszystkie tak otrzymane pary uporządkowane (x_i, y_j) możemy zapisać, jak w poniższej w tabeli.

$x_i \backslash y_j$	$y_1 = 4$	$y_2 = 5$	$y_3 = 6$	$y_4 = 7$	$y_5 = 8$	$y_6 = 9$	$y_7 = 10$
$x_1 = 2$	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)	(2, 10)
$x_2 = 3$	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)	(3, 10)
$x_3 = 4$	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)	(4, 10)
$x_4 = 5$	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)	(5, 10)
$x_5 = 6$	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)	(6, 10)
$x_6 = 7$	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)	(7, 9)	(7, 10)
$x_7 = 8$	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	(8, 7)	(8, 8)	(8, 9)	(8, 10)
$x_8 = 9$	(9, 4)	(9, 5)	(9, 6)	(9, 7)	(9, 8)	(9, 9)	(9, 10)
$x_9 = 10$	(10, 4)	(10, 5)	(10, 6)	(10, 7)	(10, 8)	(10, 9)	(10, 10)
$x_{10} = 11$	(11, 4)	(11, 5)	(11, 6)	(11, 7)	(11, 8)	(11, 9)	(11, 10)

Wobec tego wszystkich punktów, które można otrzymać według podanych warunków jest $10 \cdot 7 = 70$.

Wnioski zapisane w powyższym przykładzie ilustrują zastosowanie kolejnej podstawowej zasady kombinatorycznej, zwanej regułą mnożenia.

Stosowanie tej reguły w praktyce zaczniemy od przykładów polegających na tym, że - podobnie jak powyżej - mamy obliczyć liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia, w którym wykonujemy kolejne czynności niezależnie od siebie. Następnie pokażemy, jak stosować regułę mnożenia w sytuacji, kiedy liczby możliwości w kolejnych etapach przeprowadzanego doświadczenia takiego warunku nie spełniają, ale dadzą się jednoznacznie określić.

Twoje cele

- Zapoznasz się z regułą mnożenia.
- Będziesz doskonalić umiejętności posługiwania się tym pojęciem w zadaniach kombinatorycznych.
- Nauczysz się, jak wykorzystać regułę mnożenia do rozwiązywania zadań polegających na zliczaniu liczby możliwości w kolejnych jego etapach, w których zbiór wyników jest ustalony.
- Dowiesz się także, jak stosować regułę mnożenia w tych przypadkach, kiedy liczba możliwości w kolejnym etapie przeprowadzanego doświadczenia jest zależna od liczby możliwości obliczonych w etapach poprzednich.

Przeczytaj

Reguła: Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Dla dowodu zauważmy, że dwie pierwsze czynności możemy wykonać na $k_1 \cdot k_2$ sposobów – wystarczy w tym celu rozumować podobnie, jak w przykładzie opisanym we wprowadzeniu.

Zatem postępując analogicznie, stwierdzamy w kolejnych krokach, że:

- trzy pierwsze czynności możemy wykonać na $(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3$ sposobów,
- cztery pierwsze czynności możemy wykonać na $(k_1 \cdot k_2 \cdot k_3) \cdot k_4$ sposobów,
- ...
- wszystkie n czynności możemy wykonać na $(k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1}) \cdot k_n = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład 1

Obliczymy, ile jest wszystkich siedmioznakowych kodów, które są zapisane według następujących zasad:

- pierwszym znakiem jest wybrana wielka litera alfabetu łacińskiego, czyli jeden z dwudziestu sześciu następujących znaków: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,
- drugim znakiem jest wybrana mała litera alfabetu łacińskiego,
- na każdym z czterech kolejnych miejsc (trzecim, czwartym, piątym i szóstym) zapisujemy dowolnie wybraną cyfrę ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$,
- na ostatnim miejscu zapisujemy znak specjalny wybrany z ośmioelementowego zbioru $\{!, @, \#, \$, \%, +, -, _ \}$.

Tworząc taki kod dokonujemy siedmiu kolejnych wyborów, przy czym:

- znak na pierwszym miejscu możemy wybrać na 26 sposobów,
- znak na drugim miejscu możemy wybrać na 26 sposobów,
- znak na trzecim miejscu możemy wybrać na 10 sposobów,
- znak na czwartym miejscu możemy wybrać na 10 sposobów,

- znak na piątym miejscu możemy wybrać na 10 sposobów,
- znak na szóstym miejscu możemy wybrać na 10 sposobów,
- znak na siódmym miejscu możemy wybrać na 8 sposobów.

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że wszystkich takich kodów jest

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 = 54080000$$

Przykład 2

Obliczymy, ile jest wszystkich dziewięcioznakowych kodów, które da się zapisać według następujących zasad:

- pierwsze trzy znaki to trzy różne wielkie litery alfabetu łacińskiego,
- na każdym z czterech kolejnych miejsc (czwartym, piątym, szóstym i siódmym) zapisujemy dowolnie wybraną cyfrę ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, przy czym zapisane cyfry są parami różne,
- na ostatnich dwóch miejscach (ósmym i dziewiątym) zapisujemy dwie różne małe litery alfabetu łacińskiego, które są samogłoskami, czyli są wybrane spośród znaków a, e, i, o, u, y.

Tworząc taki kod dokonujemy dziewięciu kolejnych wyborów. Opiszemy te wybory z podziałem na trzy etapy.

(1) Opisujemy najpierw możliwości wyboru trzech pierwszych znaków:

- znak na pierwszym miejscu możemy wybrać na 26 sposobów,
- niezależnie od wyboru dokonanego za pierwszym razem znak na drugim miejscu możemy wybrać na 25 sposobów (nie możemy powtórzyć litery zapisanej na pierwszym miejscu),
- niezależnie od wyboru dokonanego za pierwszym i za drugim razem na trzecim miejscu znak możemy wybrać na 24 sposoby (nie możemy powtórzyć liter zapisanych na dwóch pierwszych miejscach).

Korzystając z **reguły mnożenia** obliczamy, że trzy początkowe znaki możemy zapisać na $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ sposobów.

(2) Wybór znaków na kolejnych czterech miejscach (czwartym, piątym, szóstym i siódmym) odbywa się następująco:

- znak na czwartym miejscu możemy wybrać na 10 sposobów,
- niezależnie od wyboru czwartego znaku kolejny, na piątym miejscu, możemy wybrać na 9 sposobów (nie możemy powtórzyć cyfry zapisanej na czwartym miejscu),
- niezależnie od wyboru czwartego i piątego znaku kolejny, na szóstym miejscu, możemy wybrać na 8 sposobów (nie możemy powtórzyć cyfr zapisanych na

czwartym i na piątym miejscu),

- niezależnie od wyboru czwartego, piątego i szóstego znaku kolejny, na siódmym miejscu, możemy wybrać na 7 sposobów (nie możemy powtórzyć żadnej z cyfr zapisanych na trzech poprzednich miejscach).

Korzystając z **reguły mnożenia** obliczamy, że znaki na miejscach czwartym, piątym, szóstym i siódmym możemy zapisać na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ sposobów.

(3) Na koniec opisujemy wybór znaków na ostatnich dwóch miejscach (ósmym i dziewiątym):

- znak na ósmym miejscu możemy wybrać na 6 sposobów,
- niezależnie od wyboru ósmego znaku kolejny, na dziewiątym miejscu, możemy wybrać na 5 sposobów (nie możemy powtórzyć litery zapisanej na poprzednim miejscu).

Korzystając z **reguły mnożenia** obliczamy, że dwa ostatnie znaki możemy zapisać na $6 \cdot 5 = 30$ sposobów.

Ponieważ liczba wyborów w każdym z opisanych powyżej etapów została ustalona, więc, po raz kolejny korzystając z **reguły mnożenia**, obliczamy, że wszystkich kodów zapisanych według określonych warunków jest

$$(26 \cdot 25 \cdot 24) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 5) = 15600 \cdot 5040 \cdot 30 = 2358720000.$$

Uwaga. W powyższym przykładzie wykorzystaliśmy **reguły mnożenia** w sytuacji, kiedy liczba możliwych sposobów wykonania kolejnej czynności była zależna od tego, jakim wynikiem zakończyły się czynności ją poprzedzające.

Zauważmy więc, że w przypadku, gdy nie jest ustalony zbiór wyników kolejnych czynności, ale umiemy określić liczbę wyników możliwych do uzyskania w kolejnych krokach reguła mnożenia pozostaje w mocy.

Przykład 3

Obliczymy, ile jest wszystkich pięciznakowych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, według następujących zasad:

- dwie pierwsze cyfry są takie same,
- trzecia cyfra jest o 2 mniejsza od czwartej,
- piąta cyfra jest parzysta.

Zapiszmy wybory kolejnych cyfr jako ciąg $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, gdzie c_i oznacza cyfrę zapisaną w kodzie na miejscu $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Zauważmy, że:

- c_1 możemy wybrać na 10 sposobów: $c_1 \in (0, 1, \dots, 9)$,
- niezależnie od wyboru c_1 cyfrę c_2 możemy wybrać na 1 sposób (ma ona być taka sama, jak zapisana na pierwszym miejscu),
- ponieważ $c_3 = c_4 - 2$, więc $c_3 \in (0, 1, \dots, 7)$, zatem tę cyfrę możemy wybrać na 8 sposobów,
- niezależnie od wyboru c_3 cyfrę c_4 możemy wybrać na 1 sposób (jest tylko jednak cyfra c_4 większa o 2 od ustalonej już cyfry c_3),
- c_5 możemy wybrać na 5 sposobów: $c_5 \in (0, 2, 4, 6, 8)$.

Korzystając z **reguły mnożenia** obliczamy, że liczba wszystkich kodów jest równa $10 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 5 = 400$.

Przykład 4

Rozpatrzmy wszystkie sześciocyfrowe kody, zapisywane za pomocą parami różnych cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Obliczymy, ile jest wśród nich takich kodów, w których występuje cyfra 7.

Zapiszmy wybory kolejnych cyfr jako ciąg $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ gdzie c_i oznacza cyfrę zapisaną w kodzie na miejscu $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Zauważmy, że ponieważ cyfry w rozpatrywanym kodzie są parami różne, więc cyfrę 7 możemy wstawić na jednym z sześciu miejsc: $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, co możemy zrobić na 6 sposobów.

Niezależnie od wyboru miejsca dla cyfry 7 pozostałe 5 cyfr kodu zapisujemy, wybierając miejsca dla kolejnych cyfr, np. od lewej do prawej.

Wtedy:

- cyfrę na pierwszym wolnym miejscu możemy wybrać na 9 sposobów (nie możemy powtórzyć zapisanej już cyfry 7),
- cyfrę na drugim wolnym miejscu możemy wybrać na 8 sposobów (nie możemy powtórzyć żadnej z dwóch już zapisanych cyfr),
- cyfrę na trzecim wolnym miejscu możemy wybrać na 7 sposobów (nie możemy powtórzyć żadnej z trzech już zapisanych cyfr),
- cyfrę na czwartym wolnym miejscu możemy wybrać na 6 sposobów (nie możemy powtórzyć żadnej z czterech już zapisanych cyfr),
- cyfrę na piątym wolnym miejscu możemy wybrać na 5 sposobów (nie możemy powtórzyć żadnej z pięciu już zapisanych cyfr).

Korzystając z **reguły mnożenia** obliczamy, że liczba wszystkich kodów określonych w treści zadania jest równa $6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 90720$.

Uwaga. Powyższe zadanie można rozwiązać korzystając z [reguły mnożenia](#) oraz z [reguły dodawania](#).

Oznaczmy w tym celu:

A - zbiór wszystkich kodów o parami różnych cyfrach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których występuje cyfra 7,

B - zbiór wszystkich kodów o parami różnych cyfrach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których nie występuje cyfra 7.

Zauważmy, że:

- zbiory A i B są rozłączne,
- zbiór $A \cup B$ to zbiór wszystkich kodów sześciocyfrowych o parami różnych cyfrach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zatem na podstawie [reguły dodawania](#) stwierdzamy, że

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

$$\text{skąd } |A| = |A \cup B| - |B|.$$

Natomiast na podstawie [reguły mnożenia](#) obliczamy, że:

$$|A \cup B| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200,$$

$$|B| = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480.$$

Wobec tego

$$|A| = 151200 - 60480 = 90720.$$

Oznacza to, że jest 90720 kodów spełniających warunki zadania.

Słownik

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak zastosować regułę mnożenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D90GiynrE>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej reguły mnożenia.

Polecenie 2

Korzystając z omówionego przykładu rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrzmy wszystkie sześciocyfrowe kody, zapisywane za pomocą cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Obliczymy, ile jest wśród nich takich kodów, które spełniają jednocześnie dwa następujące warunki:

- ostatnia cyfra kodu jest liczbą parzystą,
- wśród znaków kodu występuje co najmniej jedna cyfra 2.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, ile jest wszystkich pięciodziesiętnych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i spełniają wszystkie poniższe warunki:

- pierwsza cyfra jest podzielna przez 2 lub podzielna przez 3,
- druga cyfra jest podzielna przez 2 lub podzielna przez 5,
- trzecia cyfra nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 3,
- czwarta cyfra nie jest podzielna ani przez 3, ani przez 5,
- piąta cyfra jest podzielna przez 2 lub podzielna przez 3, lub podzielna przez 5.

Odpowiedź: Liczba takich kodów jest równa .

Ćwiczenie 2



Rozpatrujemy wszystkie pięcioliterowe kody, które są zapisane za pomocą liter ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, według następujących trzech zasad:

- litery są parami różne,
- pierwszą literą jest samogłoska,
- ostatnią literą jest spółgłoska.

Wykaż, że wszystkich takich kodów jest 3780.

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest wszystkich sześciornakowych kodów, które da się zapisać za pomocą parami różnych małych liter alfabetu łacińskiego według następujących zasad:

- pierwsze dwa znaki to litery wybrane ze zbioru $\{x, y, z\}$,
- trzy ostatnie znaki to litery wybrane ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.

☐ 23625

☐ 252

☐ 29259

☐ 7560

Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy ósmiornakowe kody, które są zapisane za pomocą liter wybranych z siedmioelementowego zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Wyróżniamy spośród nich następujące zbiory:

A - zbiór tych kodów, w których na pierwszych dwóch miejscach zapisane są samogłoski, a na każdym z pozostałych - spółgłoski,

B - zbiór tych kodów, w których litery ze zbioru $\{a, b, c, d\}$ mogą być zapisane jedynie na trzech pierwszych miejscach,

C - zbiór tych kodów, w których nie ma samogłosek, a litera b występuje w nich dokładnie raz,

D - zbiór tych kodów, w których trzy ostatnie litery tworzą napis *dag*.

Dobierz w pary wymienione poniżej liczby.

$|A|$

62500

$|C|$

83349

$|D|$

131072

$|B|$

16807

Ćwiczenie 5



Oblicz, ile jest wszystkich sześciornakowych kodów zapisanych za pomocą cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, w których suma każdych dwóch sąsiednich cyfr jest nieparzysta.

Odpowiedź: Liczba takich kodów jest równa .

Ćwiczenie 6



Oblicz, ile jest wszystkich ośmioznakowych kodów zapisanych za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, które spełniają cztery poniższe warunki:

- suma wszystkich cyfr jest równa 46,
- suma dwóch pierwszych cyfr jest równa 14,
- suma dwóch ostatnich cyfr jest równa sumie dwóch pierwszych cyfr,
- suma trzeciej i czwartej cyfry jest równa sumie piątej i szóstej cyfry.

☐ 2500

☐ 576

☐ 144

☐ 120

Ćwiczenie 7



Rozpatrzmy wszystkie kody n -cyfrowe, zapisywane za pomocą parami różnych cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Wówczas:

☐ jeżeli $n = 5$, to kodów, w których występuje cyfra 7 jest więcej niż pozostałych

☐ jeżeli $n = 3$, to kodów, w których występuje cyfra 7 jest dwa razy mniej niż pozostałych

☐ jeżeli $n = 6$, to kodów, w których występuje cyfra 7 jest dwa razy więcej niż pozostałych

☐ jeżeli $n = 4$, to kodów, w których występuje cyfra 7 jest więcej niż pozostałych

Ćwiczenie 8



Rozpatrzmy następujące zbiory:

A - wszystkich siedmioelementowych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i które spełniają dwa warunki:

- suma cyfr zapisanych na dwóch pierwszych miejscach jest nieparzysta,
- iloczyn cyfr zapisanych na pięciu ostatnich miejscach jest nieparzysty,

B - wszystkich siedmioelementowych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i które spełniają dwa warunki:

- suma cyfr zapisanych na dwóch pierwszych miejscach jest nieparzysta,
- iloczyn cyfr zapisanych na pięciu ostatnich miejscach jest parzysty.

C - wszystkich siedmioelementowych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i które spełniają dwa warunki:

- suma cyfr zapisanych na trzech pierwszych miejscach jest parzysta,
- iloczyn cyfr zapisanych na czterech ostatnich miejscach jest nieparzysty,

D - wszystkich siedmioelementowych kodów, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i które spełniają dwa warunki:

- suma cyfr zapisanych na czterech pierwszych miejscach jest parzysta,
- iloczyn cyfr zapisanych na trzech ostatnich miejscach jest nieparzysty.

Uporządkuj rosnąco podane niżej liczby.

$|D|$



$|A|$



$|B|$



$|C|$



Ćwiczenie 9



Rozpatrujemy wszystkie pięcioelementowe kody, które są zapisane za pomocą cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i które spełniają każdy z poniższych warunków:

- pewne dwie kolejne cyfry tworzą liczbę 27,
- pewne dwie kolejne cyfry tworzą liczbę 52,
- pewne dwie kolejne cyfry tworzą liczbę 75.

Wynika stąd, że liczba wszystkich takich kodów:

☐ jest większa od 50

☐ jest mniejsza od 100

☐ jest większa od 40

☐ jest mniejsza od 80

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba elementów zbioru skończonego – reguła mnożenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
 - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
 - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje regułę mnożenia do rozwiązywania zadań polegających na zliczaniu liczby możliwości w kolejnych jego etapach, w których zbiór wyników jest ustalony,
- stosuje regułę mnożenia w tych przypadkach, kiedy liczba możliwości w kolejnym etapie przeprowadzanego doświadczenia jest zależna od liczby możliwości obliczonych w etapach poprzednich.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda puzzli eksperckich.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji: „Reguła mnożenia – wprowadzenie” i omawia jej cele.
2. Uczniowie wyznaczają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym przykładem zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”. Uczniowie analizują rozwiązanie zadanie przedstawione w animacji, w którym pokazane jest, jak zastosować regułę

mnożenia. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.

3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy w kontekście postawionych sobie wcześniej kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 3-5 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)
- [Reguła mnożenia, reguła dodawania \(lekcja w języku angielskim\)](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana jako materiał podsumowujący i utrwalający wiedzę.