



## Pochodna funkcji złożonej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Pochodna funkcji złożonej

Źródło: dostępny w internecie: [Marek Piwnicki on Unsplash](#), domena publiczna.

Obliczanie pochodnych funkcji elementarnych to bardzo ważna umiejętność mająca zastosowanie w rozwiązywaniu wielu problemów interdyscyplinarnych. W tym materiale przedstawimy prosty algorytm, który pozwoli nam obliczać pochodną dowolnej funkcji utworzonej z funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań i superpozycji (złożeń), przy założeniu, że istnieją pochodne funkcji elementarnych.

### Twoje cele

- Rozpoznasz funkcję złożoną.
- Zastosujesz algorytm pozwalający obliczać pochodną funkcji złożonej.

# Przeczytaj

## Twierdzenie: o pochodnej funkcji złożonej

Jeżeli istnieje złożenie funkcji  $f$  z funkcją  $g$  i funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0$ , zaś funkcja  $g$  jest różniczkowalna w punkcie  $f(x_0)$ , to funkcja  $g \circ f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0$  oraz

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Powyższy wzór zwany jest szczególnym przypadkiem **reguły łańcuchowej** dla funkcji jednej zmiennej.

### Uwaga!

Prawdziwy jest analogiczny wzór dla dowolnej liczby składanych funkcji. Należy przy tym pamiętać, że operacja składania funkcji nie jest przemienna.

### Przykład 1

Wyznamy wzór na pochodną funkcji  $f(x) = (ax + b)^2$  korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej.

### Rozwiązanie:

Funkcja  $f(x)$  jest złożeniem funkcji  $g(x) = ax + b$  oraz  $h(x) = x^2$ .

Funkcja  $g$  jest funkcją wewnętrzną, a funkcja  $h$  jest funkcją zewnętrzną. Pochodna funkcji wewnętrznej jest równa  $g'(x) = a$  oraz pochodna funkcji zewnętrznej  $h'(x) = 2x$ . Stąd na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$f'(x) = 2a(ax + b).$$

### Przykład 2

Wyznamy **złożenie funkcji**  $(g \circ f)(x)$ , gdzie  $f(x) = 2x - 3$  oraz  $g(x) = x^4$ . Obliczymy pochodną funkcji  $h(x) = (g \circ f)(x)$ .

### Rozwiązanie:

Wyznamy funkcję  $h$ :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^4$$

Wyznamy pochodną funkcji  $h$ :

$$h'(x) = \underbrace{2}_{(2x-3)'} \cdot \underbrace{4(2x-3)^3}_{g'(2x-4)} = 8(2x-3)^3.$$

### Przykład 3

Przedstawimy funkcję  $f(x) = (x^2 + 1)^{50}$  jako złożenie funkcji elementarnych, a następnie wyznaczmy jej pochodną.

#### Rozwiązanie:

Funkcja  $f(x)$  jest funkcją złożoną.

Funkcją wewnętrzną jest funkcja  $g(x) = x^2 + 1$ , a funkcją zewnętrzną  $h(x) = x^{50}$ .

Zatem  $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$ .

Pochodna funkcji zewnętrznej jest równa  $h'(x) = 50x^{49}$ .

Pochodna funkcji wewnętrznej jest równa  $g'(x) = 2x$ .

Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$f'(x) = 2x \cdot 50(x^2 + 1)^{49} = 100x(x^2 + 1)^{49}.$$

### Przykład 4

Wyznamy pochodną funkcji  $f(x) = \sin(5x)$ .

#### Rozwiązanie:

Funkcja  $f(x)$  jest funkcją złożoną.

Funkcją wewnętrzną jest funkcja  $g(x) = 5x$ , a funkcją zewnętrzną  $h(x) = \sin x$ .

Pochodna funkcji zewnętrznej wynosi  $h'(x) = \cos x$ .

Pochodna funkcji wewnętrznej wynosi  $g'(x) = 5$ .

Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$f'(x) = 5 \cos(5x).$$

### Przykład 5

Wyznamy pochodną funkcji  $f(x) = \sin^5 x$ .

#### Rozwiązanie:

Funkcja  $f(x)$  jest funkcją złożoną.

Funkcją wewnętrzną jest funkcja  $g(x) = \sin x$ , a funkcją zewnętrzną  $h(x) = x^5$ .

Pochodna funkcji zewnętrznej wynosi  $h'(x) = 5x^4$ , a funkcji wewnętrznej  $g'(x) = \cos x$ .

Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$f'(x) = 5 \cos x \cdot \sin^4 x.$$

## Słownik

### złożenie funkcji

jeśli  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow Z$ , to funkcję  $h : X \rightarrow Z$  określoną wzorem  $h(x) = g(f(x))$  nazywamy złożeniem funkcji  $f$  i  $g$ ; funkcję  $f$  nazywamy **funkcją wewnętrzną**, a funkcję  $g$  **funkcją zewnętrzną**

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie wykonaj ćwiczenia zamieszczone pod nim.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DQPfIXWLj>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego pochodnej funkcji złożonej.

---

## Polecenie 2

## Polecenie 3

Wyznaczmy pochodną funkcji  $h(x) = (2x^3 + 5)^5$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

Wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)^{40}$ .



Ćwiczenie 5

Wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = (2x + 1)^{20}(x^2 - 1)^{30}$ .



Ćwiczenie 6

Wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = x \sin(2x)$ .



Ćwiczenie 7

Wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = (x^3 + 1)^2 \sin(3x)$ .



Ćwiczenie 8

Wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = \sin(4x) + \sin(2x - 1)$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Agnieszka Niemczynowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Pochodna funkcji złożonej

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna pojęcie funkcji złożonej;
- stosuje algorytm pozwalający obliczać pochodną funkcji złożonej.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- technika świateł drogowych.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi pochodnej funkcji i jej interpretacji geometrycznej.

#### **Faza wstępna:**

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
2. Uczniowie przypominają podstawowe wzory na pochodne funkcji oraz twierdzenie o pochodnej iloczynu funkcji.
3. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Film samouczek”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2–3 z sekcji „Film samouczek”.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel przypomina uczniom cele lekcji i kryteria sukcesu. Pyta o stopień ich realizacji, używając techniki świateł drogowych.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Pochodne funkcji elementarnych](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Film samouczek można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.