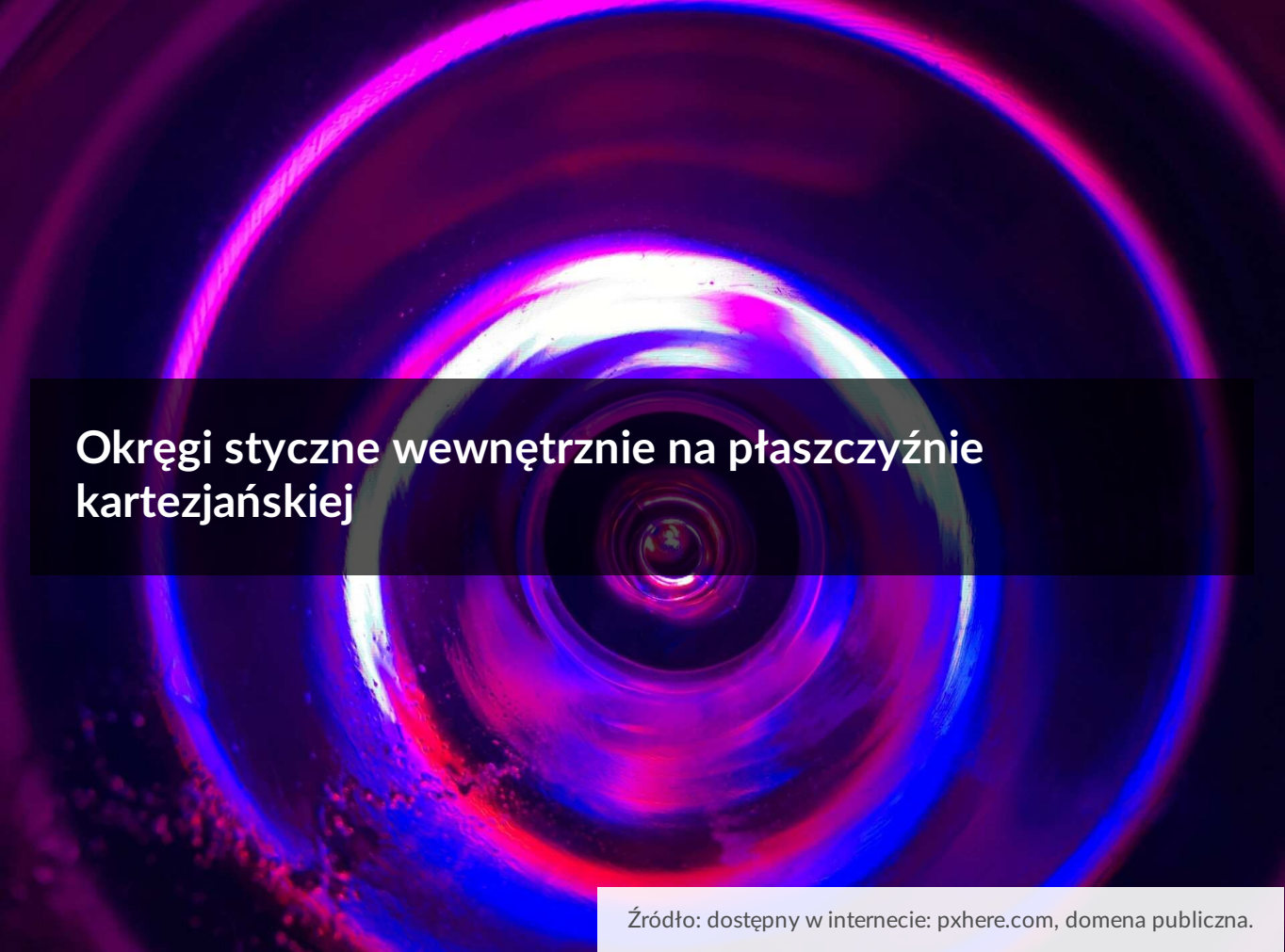




Okręgi styczne wewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Okręgi styczne wewnątrz na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Założmy, że masz zdolności manualne i postanawiasz zająć się wyrobem biżuterii artystycznej. Ponieważ lubisz kształt koła, wybierasz go na pierwsze tworzone przez siebie kolczyki. Jedno koło to jednak dla Ciebie za mało, by zrobić interesującą biżuterię, postanawiasz więc połączyć dwa. Tylko jak? Cóż... jak najprościej!

I takim oto sposobem stworzyłeś okręgi styczne wewnątrz, którymi zajmiemy się w tym materiale.



Źródło: GroMar Sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- Poznasz warunki, jakie powinny zaistnieć, aby okręgi były styczne wewnątrz.
- Obliczysz współrzędne punktu styczności.

- Zastosujesz warunek styczności w zadaniach.

Przeczytaj

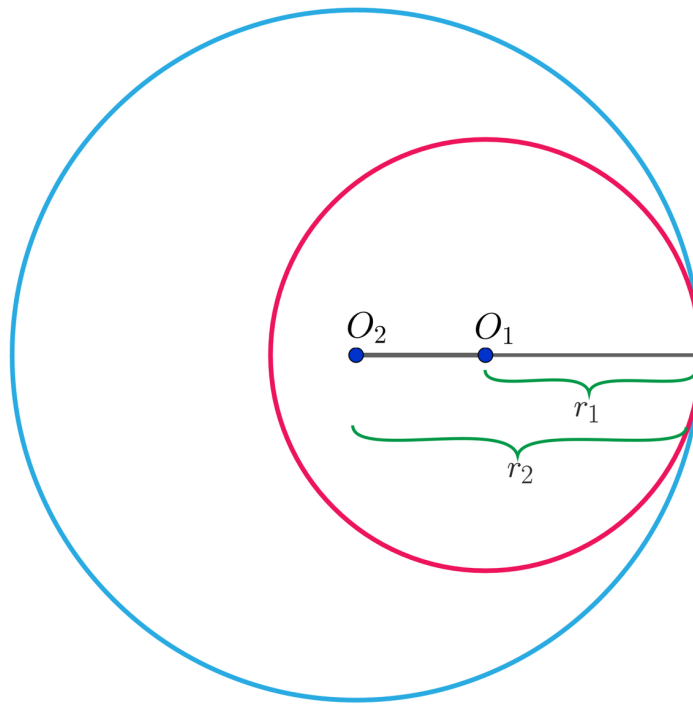
Dwa okręgi mające dokładnie jeden punkt wspólny nazywamy stycznymi. Punkt wspólny nazywamy wówczas punktem styczności. Okręgi mogą być styczne zewnętrznie lub styczne wewnętrznie.

Przeanalizujemy sytuację, gdy okręgi są styczne wewnętrznie, czyli jeden okrąg leży wewnątrz koła ograniczonego drugim.

Dwa okręgi są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środków okręgów jest równa różnicy promieni:

$$|O_1O_2| = r_2 - r_1, \text{ gdy } r_2 > r_1.$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów.



Rozważmy dwa okręgi o środkach $O_1 = (a_1, b_1)$ i promieniu r_1 oraz $O_2 = (a_2, b_2)$ i promieniu r_2 . Jeżeli mamy dwa okręgi o równaniach $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ i $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$, to są one styczne wewnętrznie, gdy

$$|O_1O_2| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = |r_2 - r_1|.$$

Odległość dwóch punktów jest zawsze liczbą nieujemną; ponieważ nie możemy stwierdzić, która z danych liczb r_1 czy r_2 jest większa, zapisaliśmy różnicę promieni w wartości bezwzględnej.

Skorzystaliśmy ze wzoru na odległość dwóch punktów $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy okręgi o promieniach $r_1 = 7$, $r_2 = 2$, których odległość między środkami wynosi 5, są styczne wewnętrznie.

Rozwiązanie

Okręgi o promieniach $r_1 = 7$, $r_2 = 2$, których odległość między środkami wynosi 5, są styczne wewnętrznie bo $5 = 7 - 2$, czyli zachodzi warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów $|O_1O_2| = r_1 - r_2$.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy okręgi $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ i $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ są styczne wewnętrznie.

Rozwiązanie

Okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ ma środek w punkcie $O_1 = (1, -2)$ i promień $r_1 = 5$.

Okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ma środek w punkcie $O_2 = (-2, 2)$ i promień $r_2 = 2$.

Obliczamy odległość środków O_1O_2 tych okręgów ze wzoru

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}:$$

$$|O_1O_2| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Sprawdzamy warunek $|O_1O_2| = |r_2 - r_1|$ i widzimy, że dla $|O_1O_2| = 5$, $r_1 = 5$ i $r_2 = 2$ nie jest on spełniony bo $5 \neq |2 - 5| = 3$.

Przykład 3

Wyznamy długość promienia okręgu o środku w punkcie $(-1, -1)$ tak, aby był on styczny wewnętrznie do okręgu $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 16$. Obliczymy współrzędne punktu styczności.

Rozwiązanie

Okrąg o równaniu $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 16$ ma środek w punkcie $O_1 = (5, 7)$ i promień $r_1 = 4$.

Okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = r_2$ ma środek w punkcie $O_2 = (-1, -1)$ i promień r_2 .

Aby **okręgi były styczne wewnętrznie**, musi być spełniony warunek $|O_1O_2| = |r_2 - r_1|$.

Ponieważ $|O_1O_2| = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ i $r_1 = 4$, to otrzymujemy równanie $10 = |r_2 - 4|$, co daje $10 = r_2 - 4$ lub $-10 = r_2 - 4$.

Ponieważ $r_2 > 0$, to $r_2 = 14$.

Aby znaleźć punkt wspólny okręgów, rozwiązujemy układ złożony z równań obu okręgów.

W tym celu zapisujemy równania w postaci:

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 16 \\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 196 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 = 16 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 196 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 14y + 74 = 16 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 196 \quad (2) \end{cases}.$$

Odejmujemy stronami od równania (1) równanie (2) i otrzymujemy

$$12x + 16y - 72 = 180$$

$12x + 16y = 252$, wyznaczamy z tego równania x :

$$12x = 252 - 16y \text{ więc } x = 21 - \frac{4}{3}y.$$

Podstawiamy $x = 21 - \frac{4}{3}y$ do np. pierwszego równania, otrzymując $(21 - \frac{4}{3}y)^2 + y^2 + 2(21 - \frac{4}{3}y) + 2y = 194$.

$$\text{Dokonujemy przekształceń: } 441 - \frac{168}{3}y + \frac{16}{9}y^2 + y^2 + 42 - \frac{8}{3}y + 2y - 194 = 0$$

i po redukcji dochodzimy do równania kwadratowego $\frac{25}{9}y^2 - \frac{170}{3}y + 289 = 0$.

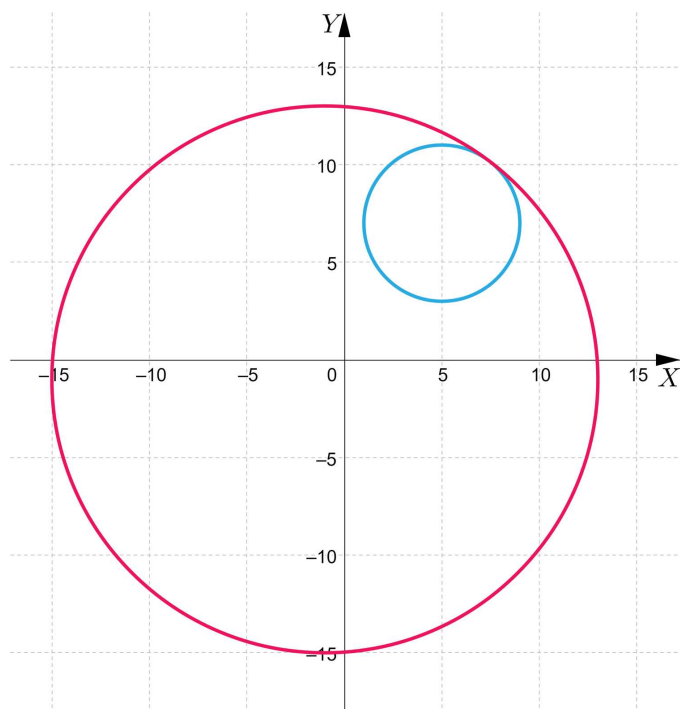
Wyróżnik tego trójmianu wynosi $\Delta = \left(\frac{170}{3}\right)^2 - 4 \cdot 289 \cdot \frac{25}{9} = 0$.

Równanie $\frac{25}{9}y^2 - \frac{170}{3}y + 289 = 0$ ma jedno rozwiązanie $y_0 = -\frac{\frac{-170}{3}}{2 \cdot \frac{25}{9}} = \frac{\frac{170}{3}}{\frac{50}{9}} = \frac{51}{5}$.

Do równania $x = 21 - \frac{4}{3}y$ podstawiamy $y = \frac{51}{5}$:

$$x = 21 - \frac{4}{3} \cdot \frac{51}{5} = \frac{37}{5}.$$

Ilustracja sytuacji przedstawionej w zadaniu.



Promień okręgu o środku w punkcie $(-1, -1)$ wynosi 14, wtedy jest on styczny wewnętrznie do okręgu $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 16$. Współrzędne punktu styczności wynoszą $(\frac{37}{5}, \frac{51}{5})$.

Przykład 4

Wyznamy współrzędne środka okręgu o promieniu 1 przechodzącego przez punkt $(4, 0)$ i stycznego wewnętrznie do okręgu $x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$.

Rozwiązanie

Równanie okręgu doprowadzamy do postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 84 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + y^2 - 84 = 0,$$

$$(x + 4)^2 + y^2 = 10^2$$

Stąd wnioskujemy, że środkiem okręgu jest punkt $O = (-4, 0)$ a promień ma długość 10.

Punkt $(4, 0)$ oznaczmy przez S . Wiemy, że $r = 1$.

Szukany okrąg ma spełniać dwa warunki:

1. ma przechodzić przez punkt $S = (4, 0)$ (1),
2. ma być styczny wewnętrznie do danego okręgu (2).

Z warunku (1): $(4 - a)^2 + b^2 = 1$

Z warunku (2): $10 - 1 = 9$.

Zatem $|OS| = 9$, $O = (-4, 0)$ i $S = (a, b)$, więc $|OS|^2 = (a + 4)^2 + b^2$, czyli $(a + 4)^2 + b^2 = 9^2$.

Otrzymujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} (4 - a)^2 + b^2 = 1 & (1) \\ (a + 4)^2 + b^2 = 81 & (2) \end{cases}$$

Odejmujemy stronami od równania (2) równanie (1) i otrzymujemy $(a + 4)^2 - (4 - a)^2 = 80$.

Po przekształceniach:

$$16 + 8a + a^2 - (16 - 8a + a^2) = 80$$

$$16 + 8a + a^2 - 16 + 8a - a^2 = 80$$

ostatecznie mamy

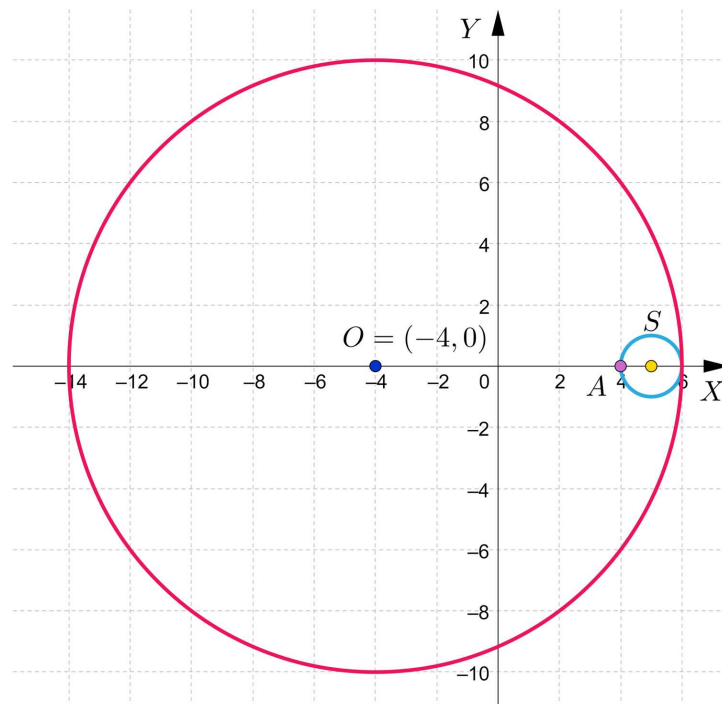
$$16a = 80$$

$$a = \frac{80}{16} = 5.$$

Podstawmy $a = 5$ do równania (1) :

$$(4 - 5)^2 + b^2 = 1, b^2 = 0 \text{ otrzymujemy } b = 0.$$

Poszukiwany okrąg ma środek w punkcie $S = (5, 0)$.



Słownik

okrąg o środku O i promieniu r

zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r

dwa okręgi styczne wewnętrznie

dwa okręgi są styczne wewnętrznie, gdy odległość środków tych okręgów jest równa różnicy promieni

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą okręgi styczne wewnętrznie, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWGh7DpDL>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego okręgów stycznych wewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Polecenie 2

Sprawdź, czy okręgi $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 49$ i $(x + 2)^2 + (y + 8)^2 = 4$ są styczne wewnętrznie.

Polecenie 3

Okręgi $(x + 1)^2 + y^2 = 16$ i $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ są styczne wewnętrznie; oblicz współrzędne punktu styczności.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie: O_1 o środku w punkcie S_1 i promieniu r_1 oraz O_2 o środku w punkcie S_2 i promieniu r_2 . Wiadomo, że $|S_1S_2| = 13$ oraz $r_1 = 15$. Wybierz możliwe długości promieni drugiego okręgu. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ $r_2 = 28$

☐ $r_2 = 11$

☐ $r_2 = 5$

☐ $r_2 = 2$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równanie okręgu z długością promienia drugiego okręgu tak, aby były to okręgi styczne wewnętrznie.

$$(x+1)^2 + y^2 = 25 \text{ oraz} \\ (x-1)^2 + y^2 = r_2^2$$

$$r_2 = 3$$

$$x^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ oraz} \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = r_2^2$$

$$r_2 = 2$$

$$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 25 \text{ oraz} \\ (x+5)^2 + (y+2)^2 = r_2^2$$

$$r_2 = 1$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ oraz} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = r_2^2$$

$$r_2 = 4$$

Ćwiczenie 3



Jaką długość powinien mieć promień okręgu o środku w punkcie $S = (2, 0)$, aby był on styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $8 - 3\sqrt{2}$

☐ $5\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{2}$

☐ $8 + 3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4



Dany jest okrąg O_1 o równaniu $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$. W puste miejsce wpisz odpowiednie liczby całkowite.

1. Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $x^2 + (y - 13)^2 = r^2$, gdy $r =$.

2. Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = r^2$, gdy $r =$.

3. Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$, gdy $r =$.

Ćwiczenie 5



Dany jest okrąg O_1 o równaniu $x^2 + y^2 = 9$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = r^2$, gdy $r = 13$.

☐ Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$, gdy $r = 3 - \sqrt{3}$ lub $r = 3 + \sqrt{3}$.

☐ Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$, gdy $r = 3 - \sqrt{2}$ lub $r = 3 + \sqrt{2}$.

☐ Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = r^2$, gdy $r = 2$ lub $r = 8$.

Ćwiczenie 6



Dany jest okrąg O_1 o równaniu $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 400$. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 11)^2 = 9$.	☐	☐
Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 14)^2 + (y + 19)^2 = 289$.	☐	☐
Okrąg O_1 jest styczny wewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 1369$.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Okręgi o równaniach: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ oraz $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 100$ są styczne wewnętrznie. Jakie współrzędne ma punkt styczności tych okręgów? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(-6, 0)$

☐ $(-2, 2)$

☐ $(-5, -2)$

☐ $(1, 6)$

Ćwiczenie 8



Okręgi o równaniach: $x^2 + 6x + y^2 - 10y - 866 = 0$ oraz $(x - 4)^2 + (y + 19)^2 = 25$ są styczne wewnętrznie.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Odległość między środkami tych okręgów wynosi 35.

☐ Punkt styczności tych okręgów ma współrzędne $(\frac{189}{35}, -\frac{119}{5})$.

☐ Punkt styczności tych okręgów ma współrzędne $(5, -24)$.

☐ Odległość między środkami tych okręgów wynosi 25.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okręgi styczne wewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy:

VIII. Planimetria

Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostokąt do innej prostej, styczność do okręgu);

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Uczeń:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;

2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów;
- wykazuje styczność wewnętrzną dwóch okręgów;
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia współrzędnych punktu styczności dwóch okręgów;
- wykorzystuje warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów w rozwiązaniach zadań;
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej;
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania, posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych;
- pokaz multimedialny;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają równanie okręgu;
2. Uczniowie określają, jak mogą być położone dwa okręgi;
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Metodą „burzy mózgów” uczniowie podają warunek, jaki musi być spełniony, aby okręgi były styczne wewnętrznie;
2. Warunek konieczny i wystarczający zostaje zapisany na tablicy przez chętnego ucznia;
3. Nauczyciel prezentuje animację;
4. Na forum całej klasy uczniowie omawiają rozwiązania zadań przedstawionych w animacji;
5. Uczniowie, w parach, rozwiązują zadania znajdujące się pod animacją;
6. Chętni uczniowie podają rozwiązania, zapisując je na tablicy;
7. Nauczyciel zwraca uwagę na poprawność zapisu i jego estetykę, wyjaśnia niezrozumiałe dla uczniów elementy;
8. Nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie wskazanych ćwiczeń interaktywnych;
9. Uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych;
2. Uczniowie formułują warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów;
3. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień;
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Wzajemne położenie dwóch okręgów](#)
[Zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być inspiracją do przygotowania konstrukcji okręgów stycznych wewnętrznie, gdy dane są promienie obu okręgów.