



Podział odcinka w danym stosunku

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równość dwóch ilorazów nazywa się proporcją. Proporcję zapisuje się w postaci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, gdzie b, d są liczbami różnymi od zera. Stosuje się też zapis $a : b = c : d$.

Proporcje najczęściej stosuje się w kontekście mieszanin. Na przykład, przepis na owsiane ciasteczka przewiduje 2 szklanki mąki na każde 3 szklanki płatków owsianych, czyli mieszamy składniki w proporcji 2 : 3. Wykorzystując tę proporcję przeliczamy, że na 9 szklanek płatków owsianych trzeba użyć 6 szklanek mąki.

Podobnie, jeśli w tym przepisie uwzględniamy liczbę jajek, na przykład, przepis przewiduje dwie szklanki mąki i jedno jajko na każde 3 szklanki płatków owsianych, wtedy mieszamy składniki w proporcji 2 : 1 : 3. Wykorzystując tę proporcję przeliczamy, że na 9 szklanek płatków owsianych trzeba użyć 6 szklanek mąki i 3 jajka.

W tym materiale pokażemy zastosowanie proporcji w problemie podziału odcinka w danym stosunku $a : b$, co sprowadza się do podzielenia danego odcinka na dwa odcinki długości c i d w taki sposób, by zachodziła proporcja $a : b = c : d$. Zobaczysz jak można stosując twierdzenie Talesa geometrycznie dokonać podziału odcinka w danym stosunku. Rozważymy też podział odcinka w uogólnionym stosunku $a : b : c$.

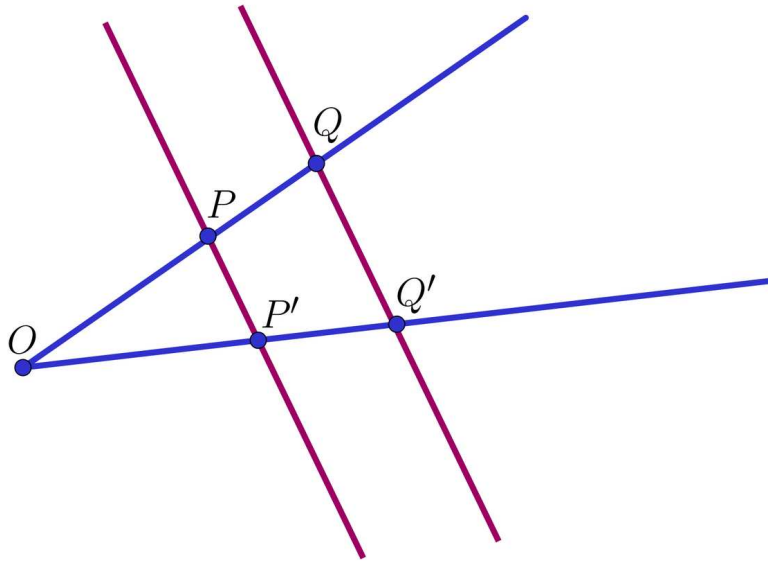
- Dowiesz się co to znaczy podzielić odcinek w danym stosunku.
- Wyznaczysz wartość stosunku podziału odcinka na podstawie danych długości odcinków.
- Wyznaczysz długości odcinków na podstawie znanego stosunku i informacji o długościach wybranych odcinków.
- Wykonasz konstrukcję odcinków o danej długości, również niewymiernej.
- Wykonasz konstrukcję podziału odcinka na dowolną ilość równych odcinków.
- Wykonasz konstrukcję podziału odcinka w danym stosunku.
- Zastosujesz podział odcinka w danym stosunku do rozwiązywania problemów w innych dziedzinach planimetrii.

Przeczytaj

Twierdzenie: o stosunku odcinków wyznaczonych przez dwie proste równoległe na ramionach kąta

Popatrzmy na rysunek poniżej, gdzie ramiona kąta o wierzchołku w punkcie O przecięte są dwiema prostymi równoległymi. Wówczas stosunek długości odcinków wyznaczonych na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta, czyli

$$\frac{|OQ|}{|OQ'|} = \frac{|OP|}{|OP'|}.$$



Dowód

Zauważmy, że równość $\frac{|OQ|}{|OQ'|} = \frac{|OP|}{|OP'|}$ jest równoważna równości $\frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|}$ oraz, że $|OQ| = |OP| + |PQ|$ i $|OQ'| = |OP'| + |P'Q'|$.

Zatem tezę możemy zapisać w następującej postaci:

$$\frac{|OP| + |PQ|}{|OP|} = \frac{|OP'| + |P'Q'|}{|OP'|},$$

co łatwo przekształcamy do wzoru:

$$1 + \frac{|PQ|}{|OP|} = 1 + \frac{|P'Q'|}{|OP'|}$$

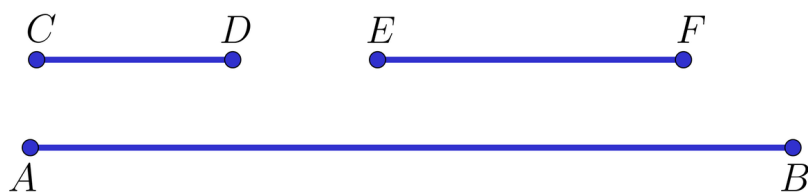
i dalej

$$\frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{|P'Q'|}{|OP'|},$$

co jest wnioskiem z Twierdzenia Talesa.

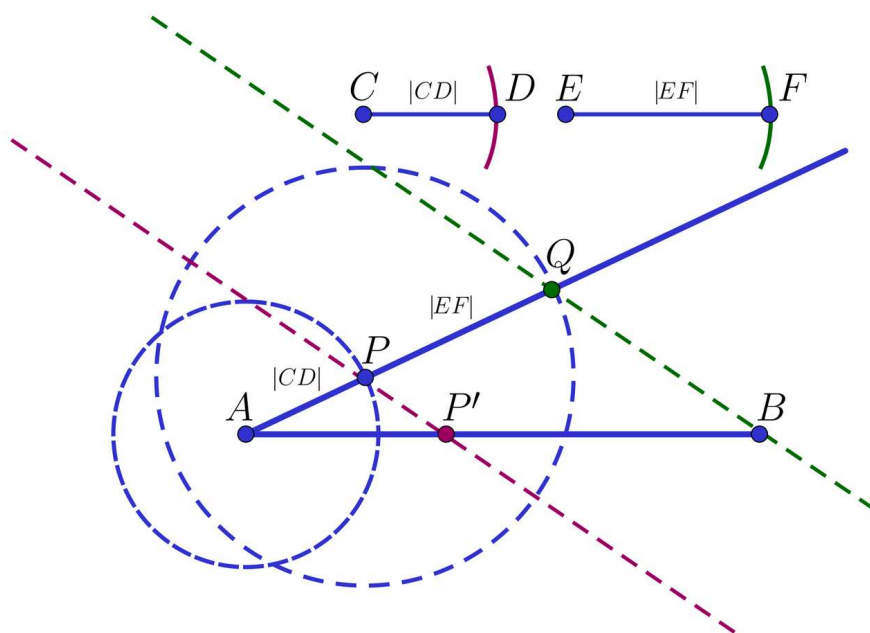
Przykład 1

Wykorzystując twierdzenie o stosunku odcinków wyznaczonych przez dwie proste równoległe na ramionach kąta, możemy geometrycznie dokonać podziału danego odcinka AB w stosunku wyznaczonym przez długości dwóch innych odcinków CD i EF , tak jak na rysunku, nie mierząc długości tych odcinków.



Rozwiązanie

Konstrukcja podziału odcinka, gdzie stosunek jest podany w postaci dwóch odcinków podziału, polega na następujących krokach przedstawionych na rysunku:



1. Narysuj półprostą p o początku w punkcie A .
2. Zmierz cyrklem długość odcinka CD i wstawiając nóżkę cyrkla w punkcie A zatocz łuk tak, by przeciął się z półprostą p . Niech P oznacza ten punkt przecięcia.
3. Zmierz cyrklem długość odcinka EF i wstawiając nóżkę cyrkla w punkcie P zatocz łuk tak, by przeciął się z półprostą p . Niech Q oznacza ten punkt przecięcia.
4. Przez punkty Q i B poprowadź prostą l .

5. Przez punkt P poprowadź prostą k równoległą do prostej l . Niech P' oznacza punkt przecięcia prostej k z odcinkiem AB .
6. Punkt P' jest taki, że $\frac{|AP'|}{|P'B|} = \frac{|CD|}{|EF|}$.

Definicja: punktu podziału odcinka w danym stosunku

Założmy, że dany jest stosunek $p : q$. Mówimy, że punkt C leżący na odcinku AB dzieli odcinek AB w stosunku $p : q$, jeśli

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{p}{q}.$$

Punkt P' w poprzedniej konstrukcji jest punktem podziału odcinka AB w stosunku $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{p}{q}$.

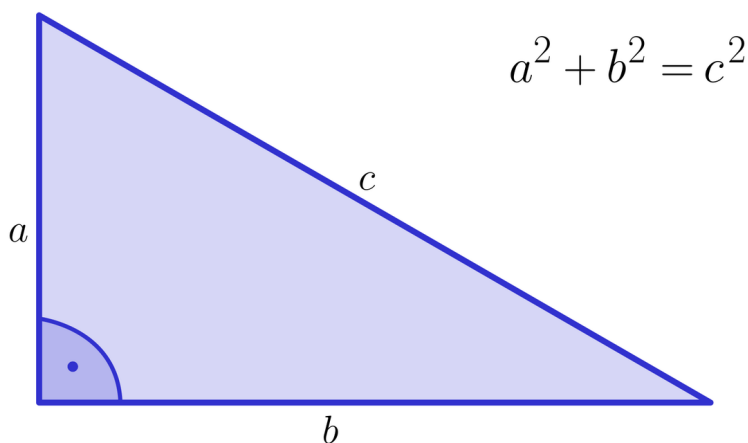
Możemy dokonać podziału odcinka również w sytuacji, gdy podane są tylko długości odcinków CD i EF z poprzedniej konstrukcji, pod warunkiem, że potrafimy skonstruować odcinki o podanych długościach.

Przykład 2

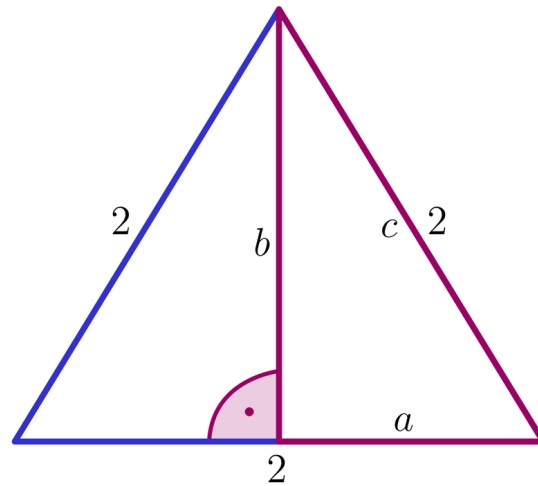
Zastanówmy się jak konstrukcyjnie podzielić odcinek AB w stosunku $\sqrt{3} : 2$.

Rozwiązanie

Narysujemy odcinek długości $\sqrt{3}$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa przedstawionego na rysunku:

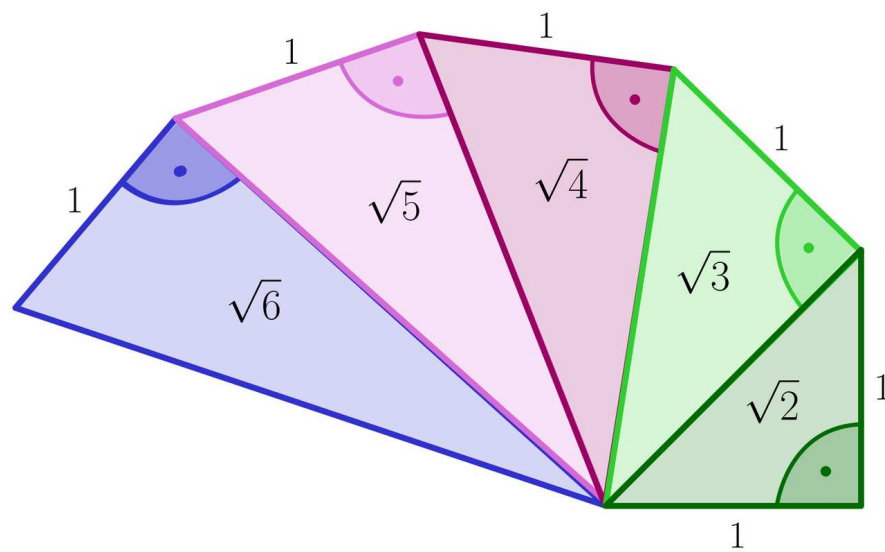


Zauważmy, że jeśli $a = 1$, $c = 2$, to $b = \sqrt{3}$.



Rzeczywiście, $a^2 + b^2 = 1 + 3 = 4 = c^2$. Jeżeli więc skonstruujemy trójkąt równoboczny o boku długości 2, to jego wysokość będzie miała długość właśnie $\sqrt{3}$.

Innym sposobem konstrukcji odcinków o długości pierwiastków z liczb naturalnych jest przedstawiona na rysunku spirala zwana ślimakiem Teodorosa.



Poprawność konstrukcji wynika z Twierdzenia Pitagorasa, gdyż mamy kolejno:

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\sqrt{5}^2 + 1} = \sqrt{5 + 1} = \sqrt{6}$$

Postępując dalej w ten sam sposób, możemy skonstruować pierwiastek z dowolnej liczby naturalnej.

Skoro już potrafimy skonstruować odcinek długości $\sqrt{3}$ oraz odcinek długości 2, to dowolny odcinek AB podzielimy w stosunku $\sqrt{3} : 2$ metodą przedstawioną w Przykładzie 1. Prowadzimy półprostą o początku w punkcie A . Na tej półprostej z punktu A zaznaczamy łuk długości $\sqrt{3}$ i punkt przecięcia półprostej z łukiem oznaczamy symbolem P . Następnie z punktu P zaznaczamy łuk długości 2 i punkt przecięcia półprostej z łukiem oznaczamy symbolem Q . Przez punkty BQ prowadzimy prostą, a następnie przez punkt P prowadzimy prostą równoległą do prostej BQ . Punkt przecięcia prostej BQ z odcinkiem AB jest punktem podziału tego odcinka w stosunku $\sqrt{3} : 2$.

Korzystając z faktu, że stosunek podziału odcinka jest ilorazem, możemy w celu uproszczenia wykonywać przekształcanie tego ilorazu w taki sposób, aby nie zmienić jego wartości, na przykład skracać i rozszerzać ten stosunek, w taki sam sposób jak skracamy i rozszerzamy ułamki.

Przykład 3

Uprościmy stosunek $\frac{4\pi}{3\pi}$.

Rozwiązanie

Chcemy podzielić dany odcinek w stosunku $\frac{4\pi}{3\pi}$. Stosując omówione wyżej sposoby musielibyśmy **skonstruować** odcinki 4π oraz 3π , ale możemy uprościć to zadanie skracając dany stosunek przez π . Wtedy $\frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3}$ i zadanie sprowadza się do podziału odcinka w stosunku $4 : 3$.

Podobnie postępując mamy:

2. $\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 = 3 : 1$
3. $\frac{1,12}{2,4} = \frac{112}{240} = \frac{7}{15} = 7 : 15$
4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2}$

Zauważmy, że w przykładach 1–3 powyżej stosunek podziału odcinka sprowadzał się do ułamka, którego licznik i mianownik były liczbami całkowitymi dodatnimi. Natomiast przykład pokaże, że nie zawsze możliwe jest uzyskanie takiej postaci.

Twierdzenie: o stosunku wymiernym

Jeżeli stosunek $\frac{p}{q}$ jest liczbą wymierną dodatnią, to istnieją względnie pierwsze, dodatnie liczby całkowite m, n takie, że otrzymamy **proporcję**

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}.$$

W przypadku, gdy stosunek podziału odcinka AB sprowadza się do postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, konstrukcja podziału odcinka AB może być sprowadzona do podzielenia odcinka AB na $m + n$ odcinków równej długości. Pierwszy odcinek podziału będzie sumą m pierwszych odcinków, a drugi będzie sumą n kolejnych odcinków. Dla uproszczenia zaleca się by ułamek $\frac{m}{n}$ był nieskracalny. Pokażemy to na przykładzie.

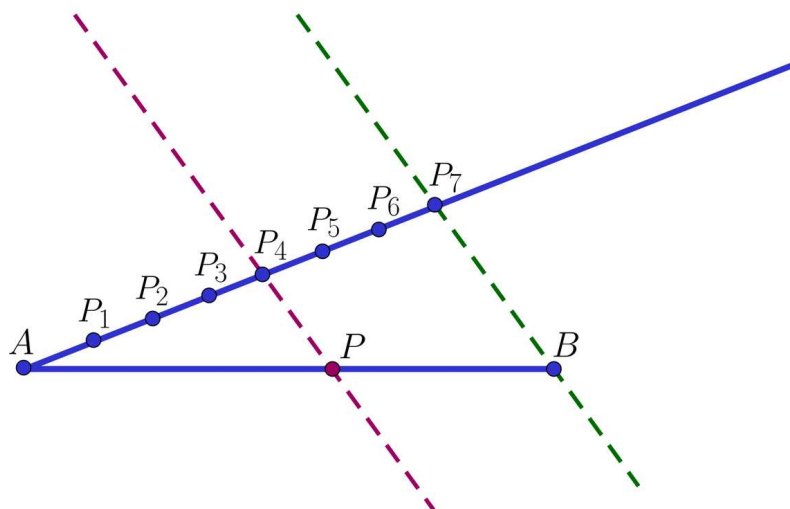
Przykład 4

Podzielimy odcinek AB w stosunku $12 : 9$.

Rozwiązanie

Wpierw upraszczamy stosunek $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ i wykonujemy następujące kroki:

1. Obliczamy sumę $4 + 3 = 7$.
2. Rysujemy półprostą p o początku w punkcie A .
3. Ustalamy rozwartość cyrkla d i wstawiając nóżkę cyrkla w punkcie A zaznaczamy na półprostej p punkt P_1 .
4. Następnie, nie zmieniając rozwartości cyrkla, wstawiamy nóżkę cyrkla w punkcie P_1 i zaznaczamy punkt P_2 .
5. Powtarzamy te czynności dla P_2 i kolejnych punktów do momentu aż zaznaczymy punkt P_7 . Odcinek AP_7 jest podzielony na 7 odcinków równej długości d (równej rozwartości cyrkla).
6. Rysujemy prostą k przechodzącą przez punkty P_7 i B oraz prostą l równoległą do k przechodzącą przez punkt P_4 .
7. Punkt P przecięcia prostej k z odcinkiem AB jest punktem podziału tego odcinka w stosunku $4 : 3$.
8. Konstrukcja ta jest poprawna, gdyż odcinek AP_4 ma długość równą $4d$ a odcinek P_4P_7 ma długość równą $3d$. Stąd ich stosunek jest równy $4d : 3d = 4 : 3$ a konstrukcja z Przykładu 1 gwarantuje, że P jest punktem podziału odcinka AB w tym samym stosunku $4 : 3$.

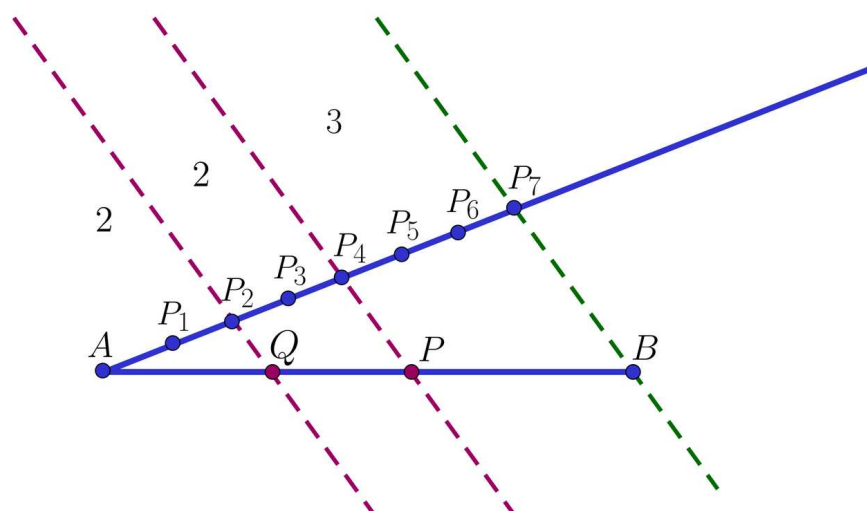


Przykład 5

Podamy sposób podziału odcinka w stosunku $m : n : k$, gdzie m, n, k są dodatnimi liczbami całkowitymi na przykładzie stosunku $2 : 2 : 3$.

Rozwiązanie

1. Sumujemy $2 + 2 + 3 = 7$.
2. Odkładamy na półprostej p siedem odcinków równej długości jak w poprzednim przykładzie.
3. Rysujemy prostą k przechodzącą przez punkty P_7 i B oraz prostą l równoległą do k przechodzącą przez punkt P_4 i prostą s równoległą do k przechodzącą przez punkt P_2 .
4. Otrzymujemy punkty P i Q jak na rysunku.



W przypadku stosunku postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $m + n$ jest potęgą dwójki, możemy do podziału odcinka wykorzystać konstrukcję symetralnej odcinka. Wiadomo, że symetralna odcinka dzieli ten odcinek na połowy. Na

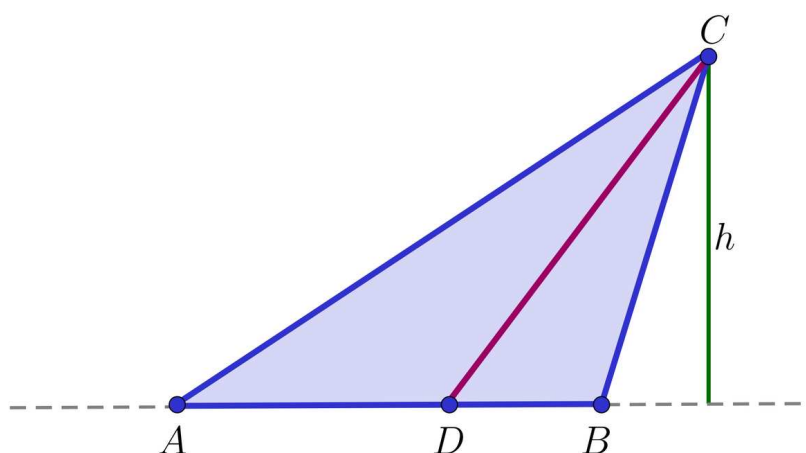
przykład, gdy mamy stosunek $3 : 1$, to $3 + 1 = 4 = 2^2$ i wtedy można podzielić odcinek AB na połowy a potem powstałe połówki znów na połowę. Dostaniemy podział odcinka AB na 4 równe części.

Przykład 6

Zastosujemy podział odcinka w danym stosunku do podziału trójkąta na trójkąty, których pola są w tym samym stosunku.

Rozwiązanie

Podzielimy dowolny trójkąt na dwa trójkąty, których pola są w stosunku $p : q$.



Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia punktu D , który dzieli bok AB trójkąta ABC w stosunku $p : q$, czyli $|AD| : |DB| = p : q$. Zauważamy, że wysokość h trójkąta ABC spuszczonego na bok AB jest też wysokością trójkątów ADC i DBC . Stosunek pól tych trójkątów jest równy:

$$\frac{\frac{1}{2}h \cdot |AD|}{\frac{1}{2}h \cdot |DB|} = \frac{|AD|}{|DB|} = p : q.$$

Słownik

proporcja

równość dwóch ilorazów w postaci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

konstrukcja cyrklem i linijką

konstrukcja odcinków, kątów i innych figur geometrycznych z użyciem jedynie cyrkla i linijki (podziałki można użyć tylko do odmierzenia długości wyjściowych odcinków)

kąt

część płaszczyzny zawarta między dwiema półprostymi (wraz z tymi półprostymi) wychodzącymi z tego samego punktu

ramiona kąta

półproste wyznaczające kąt

wierzchołek kąta

punkt wspólny ramion kąta

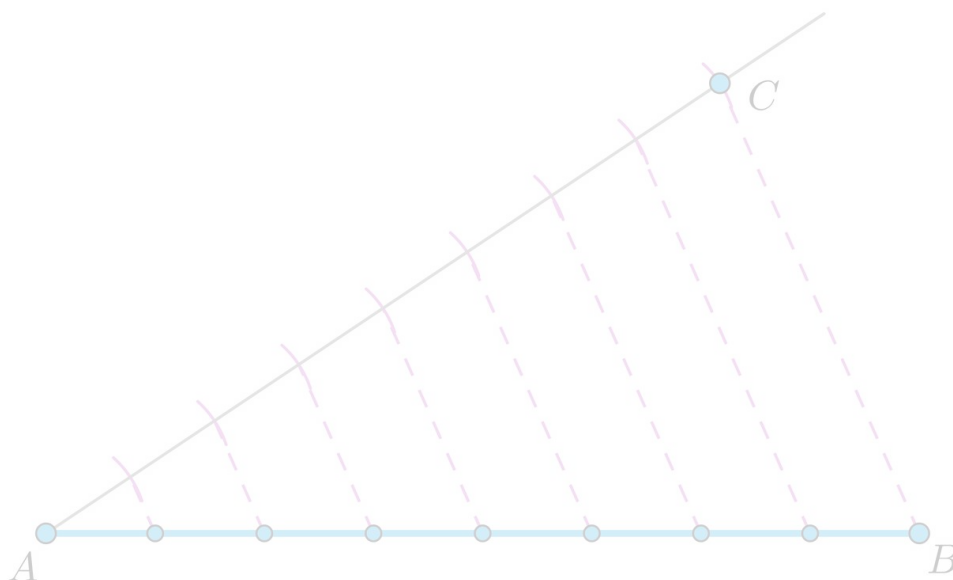
proste równoległe

proste bez punktu wspólnego lub proste pokrywające się

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Otwórz symulację interaktywną.
2. Korzystając z suwaków wybierz wartości a i b .
3. Masz dwa przyciski do wyboru, możesz zobaczyć na ile odcinków równej długości lub w jakim stosunku podzielony jest odcinek AB .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3XRcdOO9>

Polecenie 2

Na podstawie symulacji interaktywnej uzupełnij zdania, przeciągając odpowiedzi w odpowiednie miejsca.

1. Jeśli odcinek AB dzielimy w stosunku $4 : 3$, to wpierw budujemy odcinek AC złożony z równych odcinków, a następnie począwszy od punktu A odliczamy . Rysujemy odcinek BC . Przez punkt, który jest końcem odcinka prowadzimy prostą do odcinka BC . Punkt przecięcia tej prostej z odcinkiem jest punktem podziału odcinka AB w stosunku $4 : 3$.

2. Jeśli odcinek AB dzielimy w stosunku $3 : 7$, to wpierw budujemy odcinek AC złożony z równych odcinków, a następnie począwszy od punktu A odliczamy . Rysujemy odcinek BC . Przez punkt, który jest końcem odcinka prowadzimy prostą do odcinka BC . Punkt przecięcia tej prostej z odcinkiem jest punktem podziału odcinka AB w stosunku $3 : 7$.

3 odcinki	7	AB	AB	siódmego	AC	10	3 odcinki	7 odcinków
czwartego	prostopadłą	8	trzeciego	BC	równoległą	5 odcinków	12	
BC	dziwiątego	6	7	trzeciego	4 odcinki	4	prostopadłą	równoległą
3	9 odcinków	piątego	AC					

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



1



2



3



Przenieś stosunki odcinków AC i CB podane po prawej stronie na odpowiedni odnośnik do rysunku po lewej stronie.

Rysunek 1

$0,5\pi : 1,5\pi$

$\frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{3}$

$6 : 3$

$27 : 81$

$6 : 2$

Rysunek 2

$0,11 : 0,055$

$0,15 : 0,05$

$84 : 42$

$12\sqrt{5} : 4\sqrt{5}$

$4 : 12$

$2 : 1$

$\frac{12}{\sqrt{3}} : \sqrt{12}$

Rysunek 3

$0,2 : 0,6$

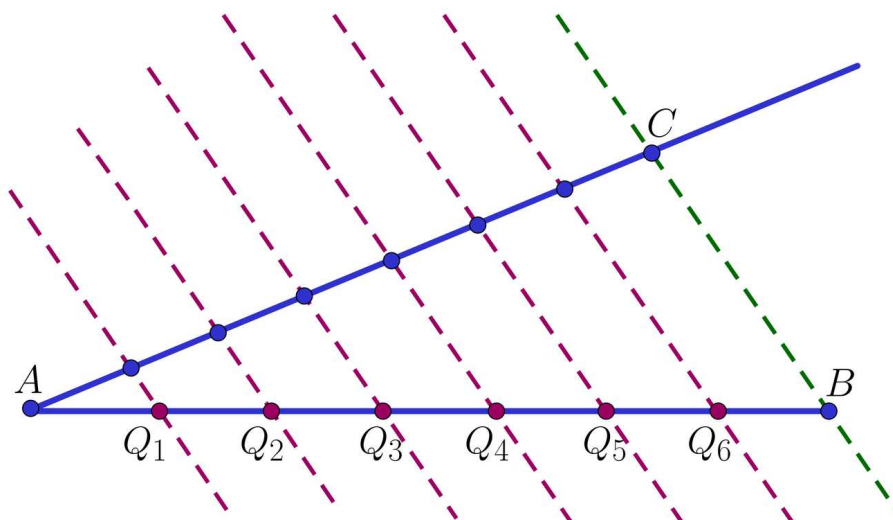
$3\pi : \pi$

3

Ćwiczenie 2



Na rysunku odcinek AC jest podzielony na 7 równych części, a proste zaznaczone linią przerywaną są równoległe.



Do każdego zdania zaznacz odpowiedź Prawda jeśli zdanie jest prawdziwe, albo zaznacz odpowiedź Fałsz jeśli zdanie jest fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Punkt Q_3 jest punktem podziału odcinka AB w stosunku 3 : 4	☐	☐
Punkt Q_5 jest punktem podziału odcinka AB w stosunku 2 : 5	☐	☐
Punkt Q_2 jest punktem podziału odcinka AB w stosunku 2 : 6	☐	☐
Punkty Q_3, Q_6 dzielą odcinek AB w stosunku 3 : 3 : 1	☐	☐
Punkty Q_1, Q_5 dzielą odcinek AB w stosunku 1 : 3 : 3	☐	☐

Ćwiczenie 3



Uzupełnij luki w podanych zdaniach. przeciągając liczby w odpowiednie miejsca.

Punkt C jest punktem podziału odcinka AB długości $7,2$ cm w stosunku $5 : 7$. Wówczas:

Długość odcinka AC jest równa cm. Długość odcinka CB jest równa cm.

Punkty C i D dzielą odcinek AB długości 63 mm w stosunku $3 : 2 : 2$.

Wtedy:

Długość odcinka AC jest równa mm. Długość odcinka CD jest równa mm. Długość odcinka DB jest równa cm. Długość odcinka AD jest równa $4,5$ cm. Długość odcinka CB jest równa dm.

Ćwiczenie 4



Uzasadnij, że możliwy jest konstrukcyjny podział odcinka w stosunku $1 : 7$ przy wykorzystaniu jedynie konstrukcji symetralnej odcinka. Zaproponuj podział odcinka AB w stosunku $1 : 7$ przy wykorzystaniu minimalnej liczby symetralnych.

Ćwiczenie 5



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, skonstruuj odcinek długości $\sqrt{13}$, następnie narysuj dowolny odcinek AB i podziel ten odcinek w stosunku $\sqrt{13} : 3$.

Ćwiczenie 6



Wyznacz stosunek długości boku kwadratu do długości jego przekątnej. Zapisz ten stosunek w postaci ułamka, w którym mianownik jest liczba wymierna. Narysuj dowolny odcinek i podziel go w tym stosunku.

Ćwiczenie 7



Wyznacz stosunek długości boku trójkąta równobocznego do długości jego wysokości. Zapisz ten stosunek w postaci ułamka, w którym mianownik jest liczba wymierna. Narysuj dowolny odcinek i podziel go w tym stosunku.

Ćwiczenie 8



Podziel dowolny trójkąt na trzy trójkąty o równych polach.

Ćwiczenie 9



Jak podzielić dowolny równoległobok na trzy równoległoboki, których stosunek pól jest równy $2 : 2 : 1$?

Ćwiczenie 10



Dane są punkty Q, R na odcinku AB . Wiadomo, że $|AQ| : |QR| = 1 : 2$ oraz $|QR| : |RB| = 8 : 5$. Wyznacz stosunki $|AQ| : |QB|$ i $|AR| : |RB|$.

Dla nauczyciela

Autor: Bożena Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podział odcinka w danym stosunku

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,

Cele operacyjne:

Uczeń:

- uogólnia pojęcie proporcji do podziału odcinka w danym stosunku,
- wykorzystuje twierdzenie Talesa do konstrukcji podziału odcinka w stosunku podanym przez dwa odcinki,
- konstruuje odcinki o długościach niewymiernych (pierwiastki kwadratowe), wykorzystuje twierdzenie Pitagorasa,
- przekształca proporcje w sposób równoważny w celu uzyskania prostszej postaci, w przypadku proporcji wymiernych sprowadza do postaci ułamka nieskracalnego,
- dzieli konstrukcyjnie odcinek na n równych odcinków,
- wykorzystuje podział odcinka na równe odcinki w celu konstrukcji podziału odcinka w stosunku wymiernym w postaci ułamka nieskracalnego,
- stosuje podział odcinka w danym stosunku w sytuacjach praktycznych,

- stosuje podział odcinka w danym stosunku do podziału trójkątów i czworokątów, tak by zachować podany stosunek pól.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm,
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów,
- wykład informacyjny

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.
- Cyrkiel i linijka.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie przypominają pojęcie proporcji. Nauczyciel informuje o zastosowaniu proporcji do określenia czym jest podział odcinka w danym stosunku.
2. Nauczyciel przypomina na czym polega konstrukcja z wykorzystaniem jedynie cyrkla i linijki bez podziałki.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel z pomocą uczniów formułuje dowód wniosku z twierdzenia Talesa o podziale ramion kąta przez kilka prostych równoległych.
2. Nauczyciel z pomocą uczniów przedstawia konstrukcyjny sposób podziału odcinka w stosunku podanym przez dwa odcinki oraz omawia przykłady.
3. Nauczyciel z pomocą uczniów przedstawia konstrukcję odcinka o podanej długości całkowitej dodatniej lub niewymiernej w postaci pierwiastka kwadratowego w tym celu przypomina twierdzenia Pitagorasa.

4. Nauczyciel z pomocą uczniów przekształca proporcje i sprowadza je do prostszej postaci.
5. Nauczyciel z pomocą uczniów przedstawia konstrukcję podziału odcinka n równych odcinków.
6. Nauczyciel z pomocą uczniów przedstawia konstrukcję podziału odcinka, gdy stosunek jest liczba wymierna. Określanie na ile równych części podzielić odcinek, by uzyskać podział w danym stosunku, również gdy stosunek podany jest w postaci $m : n : p$.
7. Nauczyciel zadaje pytanie problemowe, czy można w inny sposób niż podany podzielić odcinek na n równych odcinków, gdy n jest potęgą dwójki. Uczniowie przedstawiają swoje propozycje.
8. Uczniowie w parach zastanawiają się jak zastosować podział odcinka w danym stosunku do dzielenia trójkąta na trójkąty, których pola są w danym stosunku.
9. Nauczyciel odtwarza symulację interaktywną, gdzie uczeń wybierając liczby całkowite dodatnie a, b obserwuje podział na $a + b$ równych odcinków oraz podział w stosunku $a : b$.

Faza podsumowująca:

1. Uczeń sprawdza nabyte umiejętności i wiedzę w ramach ćwiczeń sprawdzających.
2. Uczeń rozwiązuje zadania trudniejsze wykorzystujące wiedzę przedstawioną na lekcji w szerszym kontekście praktycznym.

Praca domowa:

Zadaniem ucznia jest wyszukać informacje na temat złotego podziału odcinka, wyliczyć oraz skonstruować złotą liczbę.

Materiały pomocnicze:

- [Proporcje – zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana przez uczniów:

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspirację do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.