





Co to jest granica funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Co to jest granica funkcji

Źródło: Markus Spiske, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Pojęcie granicy jest jednym z ważniejszych pojęć związanych z analizą funkcji. Istnieją dwie definicje granicy funkcji, które zostały sformułowane przez dwóch różnych matematyków. Nim jednak się z nimi zapoznamy spróbujmy poznać intuicyjnie, czym jest granica funkcji. Wykorzystamy do tego pojęcia ciąg wartości oraz ciąg argumentów funkcji.

Twoje cele

- Dowiesz się co oznacza pojęcie granicy funkcji.
- Poznasz przykłady granic niektórych funkcji elementarnych.

Przeczytaj

Intuicyjne pojęcie granicy funkcji

Zanim spróbujemy sformułować intuicyjną definicję granicy funkcji, przypomnijmy sobie czym jest **granica ciągu** (a_n) . Intuicyjnie jest to taka liczba g , do której dążą wyrazy tego ciągu, tzn. **prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n) znajdują się dowolnie blisko liczby g . Do zilustrowania pojęcia granicy funkcji wykorzystamy pojęcia ciągu argumentów oraz ciągu wartości funkcji. Spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 1

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana będzie wzorem $f(x) = x^2$. Rozważmy ciąg argumentów tej funkcji dany wzorem $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Oczywiście ciąg ten jest zbieżny oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$. Sprawdźmy czy zbieżny jest ciąg wartości $f(x_n)$. Ponieważ

$$f(x_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

więc korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów wnioskujemy, że ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 4.$$

Zauważmy, że powyższe rozumowanie możemy powtórzyć dla jakiegokolwiek ciągu argumentów zbieżnego do 2. Istotnie jeśli ciąg x_n jest dowolnym ciągiem argumentów funkcji f takim, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$, to

$$f(x_n) = (x_n)^2 = x_n \cdot x_n.$$

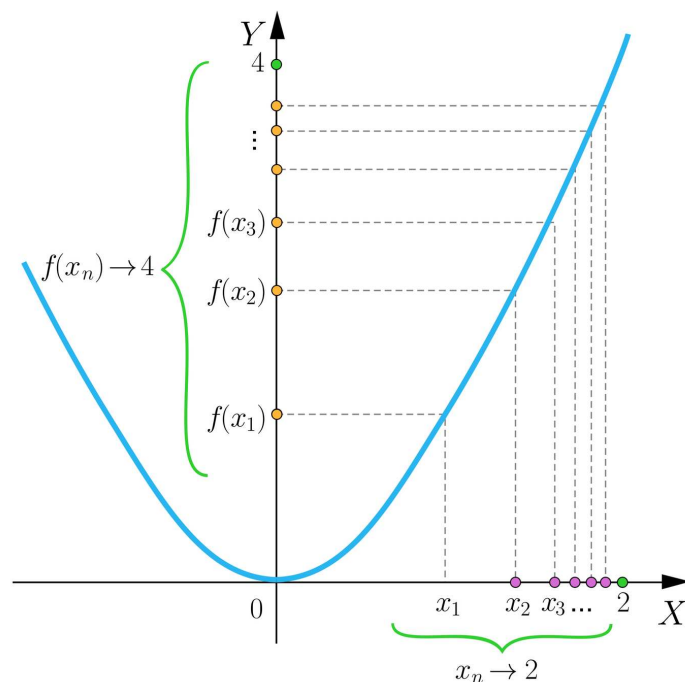
Stąd oraz z twierdzenia o arytmetyce granic otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n \cdot x_n) = 2 \cdot 2 = 4.$$

W powyższym przykładzie udało nam się wykazać następującą własność funkcji f :

Jeżeli argumenty funkcji f dążą w dowolny sposób do liczby 2, to wartości funkcji odpowiadające tym argumentom dążą zawsze do liczby 4.

Poniższa grafika przedstawia interpretację graficzną powyższej własności.



Własność zilustrowana powyżej oznacza, że funkcja $f(x) = x^2$ posiada w punkcie $x_0 = 2$ granicę równą 4, co symbolicznie zapisujemy następująco

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Granica funkcji - pojęcie intuicyjne

Powiemy, że funkcja f posiada w punkcie x_0 granicę równą liczbie g , jeśli dla argumentów tej funkcji różnych od x_0 oraz dążących w dowolny sposób do x_0 , wartości funkcji odpowiadające tym argumentom zawsze dążą do liczby g . Poprzez sformułowanie „dążą” rozumiemy istnienie granicy odpowiedniego nieskończonego ciągu (tzn. ciągu argumentów lub ciągu wartości funkcji). Fakt posiadania przez funkcję f granicy w punkcie x_0 równej g , zapisujemy następująco

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Przykład 2

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1}.$$

Zbadamy istnienie granicy funkcji f w punkcie $x_0 = -3$. W tym celu weźmy dowolny ciąg (x_n) zbieżny do liczby $x_0 = -3$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3x_n^2) = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3 \cdot (-3) \cdot (-3) = 27.$$

Stąd oraz z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3x_n^2 + x_n + 1} = \sqrt{27 + (-3) + 1} = \sqrt{25} = 5.$$

Z dowolności wyboru ciągu (x_n) zbieżnego do -3 wynika, że granicą funkcji f w punkcie $x_0 = -3$ jest liczba 5.

Czy granica funkcji zawsze istnieje?

Na postawione wyżej pytanie odpowie następujący przykład.

Przykład 3

Rozważmy funkcję daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Rozważmy ciąg $x_n = \frac{1}{n}$. Oczywiście jest to ciąg zbieżny do 0. Ponieważ $x_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ więc $f(x_n) = 2x_n - 1 = \frac{2}{n} - 1$. Stąd

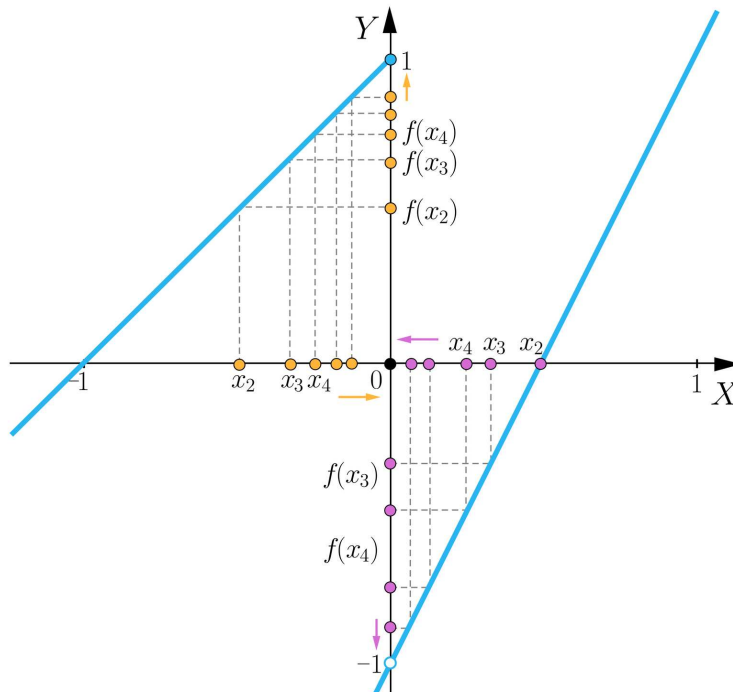
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 - 1 = -1.$$

Z drugiej strony przyjmując $x_n = -\frac{1}{n}$ widzimy, że $x_n \leq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Zatem $f(x_n) = 1 - x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Stąd w tym przypadku

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1 + 0 = 1.$$

Udało nam się zatem wskazać dwa ciągi argumentów funkcji f , które są zbieżne do zera. Jednak ciągi wartości $f(x_n)$ dla tych ciągów argumentów są zbieżne do różnych granic (odpowiednio do -1 oraz 1). Oznacza to, że funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Powyższy przykład ilustruje poniższa grafika.



Przykład 4

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, otrzymujemy

- a. jeśli $x \geq 0$, to $f(x) = \frac{x}{x} = 1$;
- b. jeśli $x < 0$, to $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$;

Widzimy stąd, że biorąc dowolny ciąg (x_n) zbieżny do liczby 0 oraz taki, że $x_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1.$$

Z drugiej strony biorąc dowolny ciąg (x_n) zbieżny do liczby 0 oraz taki, że $x_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -1$$

Wskazaliśmy zatem dwa ciągi argumentów funkcji f takie, że ciągi wartości im odpowiadające mają różne granice. Oznacza to, że funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Ważne!

Podsumowując rozważania zawarte w tym temacie możemy powiedzieć, że funkcja f posiada w punkcie g granicę równą liczbie x_0 , jeśli spełniony jest warunek: dla argumentów funkcji różnych od x_0 oraz dążących w dowolny sposób do x_0 , wartości funkcji odpowiadające tym argumentom zawsze dążą do liczby g . Fakt ten jest podstawą definicji granicy funkcji w punkcie w sensie Heinego.

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu poza co najwyżej skończoną ich ilością

granica ciągu

liczba rzeczywista g taka, że dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$

Animacja

Polecenie 1

Na poniższej animacji przedstawiono sposoby na to, jak sprawdzić, czy funkcja posiada granicę w danym punkcie. Zapoznaj się z zastosowanymi metodami, a następnie wykorzystaj je do rozwiązania zadań znajdujących się pod animacją.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DspYeBkFq>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pojęcia granicy.

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}.$$

Polecenie 2

Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz sprowadź ją do najprostszej postaci.

Polecenie 3

Sprawdź czy istnieje granica funkcji w punkcie $x_0 = -1$. Jeśli tak, oblicz ją.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana funkcja $f(x) = 4x - 1$ oraz ciąg jej argumentów $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

☐ 1

☐ 3

☐ 2

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$. Wskaż ciąg x_n , dla którego $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$.

☐ $x_n = \frac{3}{n}$

☐ $x_n = \frac{2n+3}{n}$

☐ $x_n = \frac{1-n}{2n}$

Ćwiczenie 3



Dany jest ciąg x_n taki, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -2$. Wskaż funkcje, dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 4$.

☐ $f(x) = 2x^2 + 8$

☐ $f(x) = x^2$

☐ $f(x) = 2 - x$

☐ $f(x) = 3x + 10$

Ćwiczenie 4



Dana jest funkcja $f(x) = 4x^2 - 1$. Wskaż ciągi argumentów tej funkcji, dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

☐ $x_n = \frac{n}{4n+2}$

☐ $x_n = \frac{n}{2n+1}$

☐ $x_n = \frac{2n}{n-3}$

☐ $x_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$.

Przesuń w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Jeśli $x_n = \sqrt[n]{2}$, to $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n =$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) =$

-2

3

-3

1

-1

2

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

Uzupełnij poniższy tekst przesuwając w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Funkcja f nie posiada granicy w punkcie , ponieważ dla ciągów $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ oraz $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, które są zbieżne do liczby ciągi wartości im odpowiadające mają granice: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \text{}$ $\neq$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \text{}$.

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja $f(x) = 2 - 3x$. Połącz w pary.

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -1$$

$$x_n = \frac{3-n}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$$

$$x_n = \frac{2n}{6n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -4$$

$$x_n = 2 + \frac{3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 5$$

Ćwiczenie 8



Dany jest ciąg $x_n = \sqrt[n]{3^n + 1}$. Przeciągnij do odpowiednich obszarów funkcje, które spełniają przypisany do niego warunek.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$$

$$f(x) = x^2 - 9$$

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$f(x) = x^2 - 8$$

$$f(x) = 4 - x$$

$$f(x) = 3x - 7$$

$$f(x) = 2x - 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to jest granica funkcji

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- dowie się co oznacza pojęcie granicy funkcji;
- pozna przykłady granic niektórych funkcji elementarnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metaplan;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Co to jest granica funkcji” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Co to jest granica funkcji” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Co to jest granica funkcji”).

Materiały pomocnicze

- Granice jednostronne
- Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach
- Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Co to jest granica funkcji”.