



Moment pędu punktu materialnego oraz moment pędu bryły sztywnej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Moment pędu punktu materialnego oraz moment pędu bryły sztywnej

Czy to nie ciekawe?

Na rysunku poniżej widoczna jest kula do wyburzeń – jest to bardzo masywny kawał betonu, który zwisa swobodnie na długim łańcuchu. Operator dźwigu przesuwając dźwig w jedną stronę, po czym zawraca, wprowadzając kulę w ruch wahadłowy – a ta z impetem uderza w ścianę burzonego budynku. Dlaczego ważne jest, aby kula była masywna, a łańcuch długi? W zrozumieniu tego pomoże nam pojęcie momentu pędu.



Rys. a. Kula do wyburzania. [Pixabay]

Twoje cele

W tym materiale:

- dowiesz się, czym jest moment pędu,
- zdefiniujesz moment pędu punktu materialnego oraz bryły sztywnej,
- zastosujesz te pojęcia do rozwiązywania zadań rachunkowych.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Przypomnijmy na wstępie bardzo ważne w mechanice pojęcie **pędu**. Pęd nazywany jest „ilością ruchu”. Definiuje się go jako iloczyn masy ciała m i prędkości, z jaką się ono porusza $\vec{v}$, czyli $\vec{p} = m \vec{v}$. Jeśli dwa ciała poruszają się z tą samą prędkością, większy pęd ma to, które ma większą masę. Jeśli dwa ciała mają taką samą masę, większy pęd ma to, które porusza się szybciej. Im szybciej porusza się ciało i im większą ma masę, tym większy ma pęd. Aby zmienić pęd ciała, należy przyłożyć do niego siłę, co przedstawia poniższe sformułowanie drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

gdzie $\vec{F}$ – to siła wypadkowa przyłożona do ciała, $\Delta \vec{p}$ – zmiana pędu tego ciała w czasie Δt .

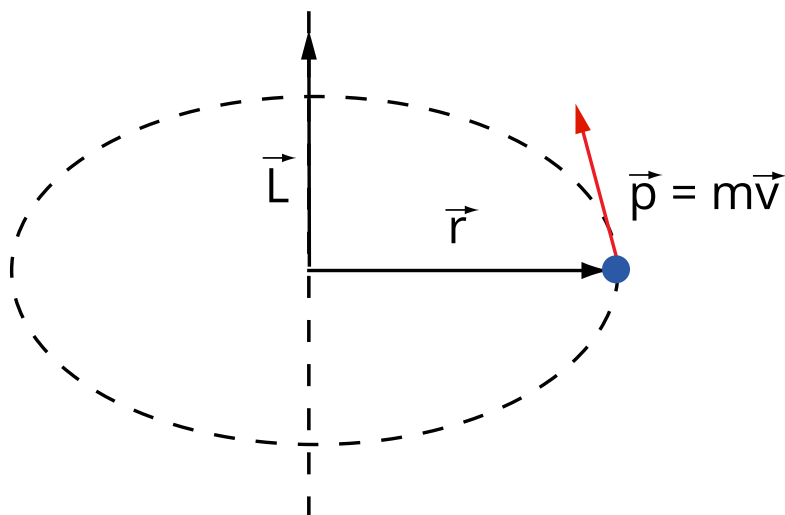
Pęd jest wielkością stosowaną w opisie ruchu postępowego. W opisie ruchu obrotowego stosujemy pojęcie **momentu pędu**. Dla punktu materialnego moment pędu jest to iloczyn wektorowy wektora odległości punktu od osi obrotu i wektora pędu tego punktu:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wartość tego iloczynu wektorowego obliczamy zgodnie z definicją jako:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \alpha$$

Jeśli założymy dla uproszczenia, że kąt α pomiędzy wektorami $\vec{r}$ oraz $\vec{p}$ jest kątem prostym, to wartość czynnika $\sin \alpha$ wyniesie: $\sin 90^\circ = 1$. Wyrażenie uprości się do $L = rp$. Pamiętajmy jednak, że zgodnie z zasadami mnożenia wektorowego, kierunek wektora momentu pędu jest prostopadły zarówno do wektora $\vec{r}$, jak i wektora $\vec{p}$. Znaczy to, że jest on prostopadły to płaszczyzny, na której leżą te wektory, jak widać na Rys. 1.:



Rys. 1. Pęd a moment pędu punktu materialnego.

Układ widoczny na Rys. 1. może wydawać się abstrakcyjny – kulka o masie m , poruszająca się z prędkością liniową $\vec{v}$ po okręgu o promieniu r . Jednakże pomyślmy teraz, że nasza kulka to piłka tenisowa, przywiązana sznurkiem do wbitego w ziemię palika, mocno uderzona rakietą – taki układ jak najbardziej da się łatwo zrealizować. Piłka ma masę m , a poprzez uderzenie (czyli przyłożenie siły $\vec{F}$ w krótkim czasie Δt) przekazano jej pęd $\vec{p} = \vec{F} \Delta t = m \vec{v}$. Ponieważ jednak piłka porusza się po okręgu, ma również moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Zwróćmy też uwagę, że uderzenie piłki w trakcie normalnej gry oznacza przyłożenie do niej siły, co powoduje zmianę jej pędu. W przypadku piłki na sznurku uderzenie jej powoduje powstanie momentu siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, który powoduje zmianę momentu pędu.

A co, jeśli nie byłaby to mała piłka – którą możemy potraktować jako punkt materialny – ale duży obiekt, bryła sztywna, o **momencie bezwładności** I ? Wtedy moment pędu takiej bryły obliczymy, sumując momenty pędów wszystkich jej elementów. Dzielimy bryłę na małe fragmenty, każdy z nich ma pęd $\vec{p}_i$, oraz wartość momentu pędu $r_i p_i$ względem osi obrotu (kąt między promieniami i pędami jest prosty i $\sin 90^\circ = 1$). Przeprowadźmy sumowanie:

$$L = \sum_i^n r_i p_i = \sum_i^n r_i m_i v_i = \sum_i^n r_i m_i \omega r_i = \omega \sum_i^n m_i r_i^2 = I \omega$$

Ponieważ wektor momentu pędu $\vec{L}$ ma ten sam kierunek i zwrot co wektor prędkości kątowej bryły $\vec{\omega}$, ostatnie równanie może być zapisane w postaci wektorowej:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Otrzymaliśmy zatem zależność stwierdzającą, że moment pędu bryły sztywnej będziemy mogli obliczyć jako iloczyn jej momentu bezwładności oraz prędkości kątowej, z jaką się ta

bryła obraca. Widzimy więc następującą analogię między ruchem postępowym i obrotowym:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Przyjrzyjmy się przykładowi liczbowemu – masa typowej piłki tenisowej to około 60 g, a jej średnica to 6,5 cm. Przyjmijmy, że sznurek, na którym jest przywiązana ma 1 metr długości. Oznacza to, że możemy potraktować ją jako punkt materialny, ignorując jej rozmiar. Przyjmijmy, że piłka została uderzona z siłą, która nadała jej prędkość 72 km/h. Jaka jest wartość momentu pędu tej piłki względem osi, do której przymocowany jest sznurek (patrz: Rys. 1.)?

$$L = rp = rmv = 1 \text{ m} \cdot 0,06 \text{ kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Zwróćmy tu uwagę, że gdyby nadać tę samą prędkość piłce znajdującej się w większej odległości, np. 2 m, moment pędu zwiększyłby się:

$$L = rp = rmv = 2 \text{ m} \cdot 0,06 \text{ kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Gdybyśmy z kolei zmniejszyli o połowę długość sznurka, ale uderzyli nadając dwa razy większą prędkość piłce niż w pierwszym z przykładów, to

$$L = rp = rmv = 0,5 \text{ m} \cdot 0,06 \text{ kg} \cdot 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Wracając do naszego przykładu z początku materiału – dlaczego dźwиг stosowany do wyburzania budynków ma zawieszoną na łańcuchu [kulę](#) o tak dużej masie? Zwróćmy uwagę, że przesunięcie ramienia dźwigu sprawia, że siła grawitacji i naprężenie łańcucha powodują ruch kuli, jak w wahadle. Kula porusza się ruchem obrotowym po wycinku koła o promieniu o długości łańcucha, na którym jest zawieszona, zyskując moment pędu. W momencie uderzenia kula przekazuje swój moment pędu ścianie, burząc ją. Im większa była długość łańcucha, tym większa prędkość, a zatem tym większy pęd kuli w momencie uderzenia.

Słowniczek

Kula do wyburzeń

(ang.: *wrecking ball*) – masywna kula zawieszona na łańcuchu dźwigu, która uderzając w ściany konstrukcji doprowadza do jej wyburzenia.

Moment bezwładności

(ang.: *moment of inertia*) – miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej, ustalonej osi obrotu.

Film samouczek

Moment pędu punktu materialnego oraz moment pędu bryły sztywnej

Na filmie przypomnimy, czym jest iloczyn wektorowy dwóch wektorów oraz jak definiujemy moment pędu. Wykorzystamy do tego przykład ciała poruszającego się po okręgu.

Polecenie 1

Zastanów się, jak będzie wyglądać moment pędu, gdy zmienimy kierunek obrotu ciała na przeciwny.

Polecenie 2

Zastanów się, jak zmieni się wartość momentu pędu, gdy prędkość wzrośnie dwukrotnie, a promień zmaleje dwukrotnie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Podaj definicję momentu pędu dla punktu materialnego.

=

$\times$

$\vec{v}$

m

$\vec{L}$

$\cdot$

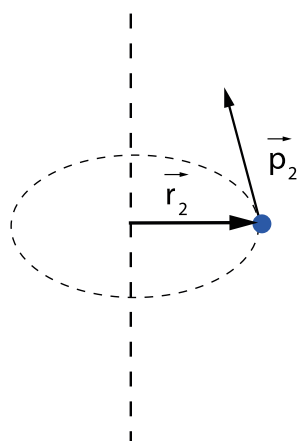
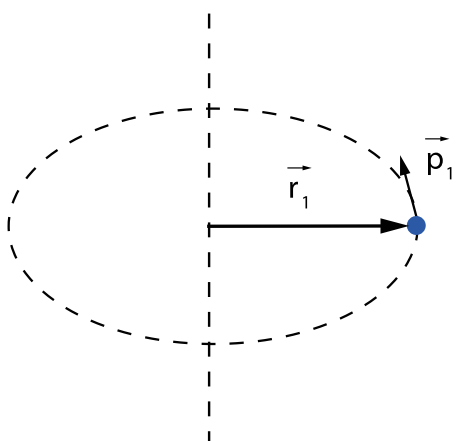
$\vec{r}$

$\vec{p}$

Ćwiczenie 2



Na rysunku poniżej widać dwa ciała obracające się dookoła pewnej osi. Ciało drugie porusza się po okręgu o dwa razy mniejszym promieniu, ale z dwa razy większą prędkością. Które z tych ciał ma większy moment pędu?



- ☐ Oba mają taki sam moment pędu.
- ☐ Ciało pierwsze ma większy moment pędu.
- ☐ Ciało drugie ma większy moment pędu.

Ćwiczenie 3



Dane są dwa walce o tej samej masie, ale różnych wymiarach. Pierwszy ma dwa razy większy promień i rozkręcono go do dwa razy mniejszej prędkości kątowej niż drugi. Który z nich ma większy moment pędu?

- ☐ Walec pierwszy ma większy moment pędu
- ☐ Mamy za mało danych, aby odpowiedzieć na to pytanie
- ☐ Oba mają taki sam moment pędu
- ☐ Walec drugi ma większy moment pędu

Ćwiczenie 4



Jaki jest moment pędu Ziemi w ruchu dookoła Słońca?

Do obliczeń przyjmij, że Ziemia jest punktem materialnym (możesz samodzielnie wykonać obliczenia, które to uzasadnią), masa Ziemi $M_Z = 5974 \cdot 10^{21}$ kg, średnia odległość od Słońca to $d = 149\,597\,887$ km, długość roku przyjmij jako 365,25 dni. Odpowiedź podaj z dokładnością do dwóch miejsc znaczących, stosując notację wykładniczą z wykładnikiem wskazanym w polu odpowiedzi.

Odpowiedź: $\cdot 10^{40} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)/s}$

Ćwiczenie 5



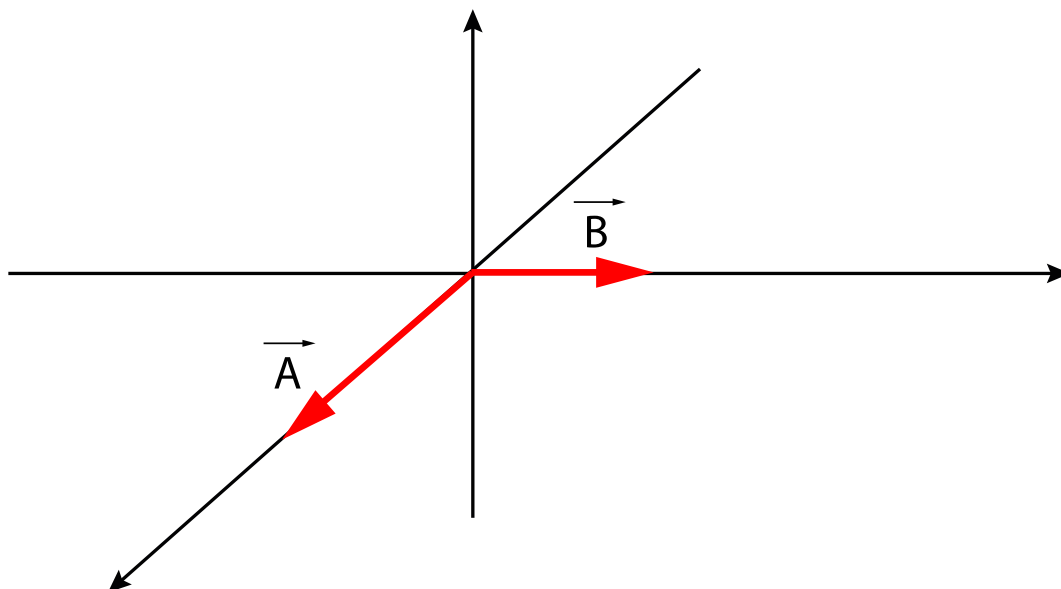
W wiertarce zamontowano wiertło o średnicy $d = 3,5$ mm. Masa tego wiertła to $m = 200$ g. Po włączeniu wiertarki, wiertło obraca się, wykonując 2500 obrotów na minutę. Jaki jest moment pędu tego wiertła? Odpowiedź podaj z dokładnością do jednej cyfry znaczącej, stosując notację wykładniczą z wykładnikiem wskazanym w polu odpowiedzi.

Odpowiedź: $\cdot 10^{-5} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)/s}$

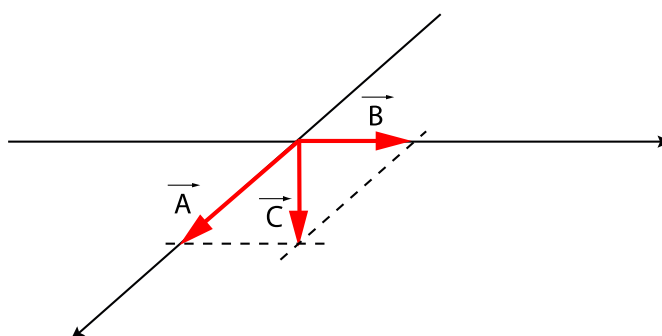
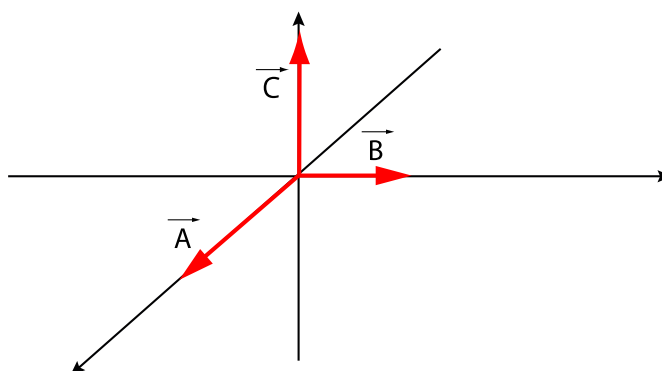
Ćwiczenie 6

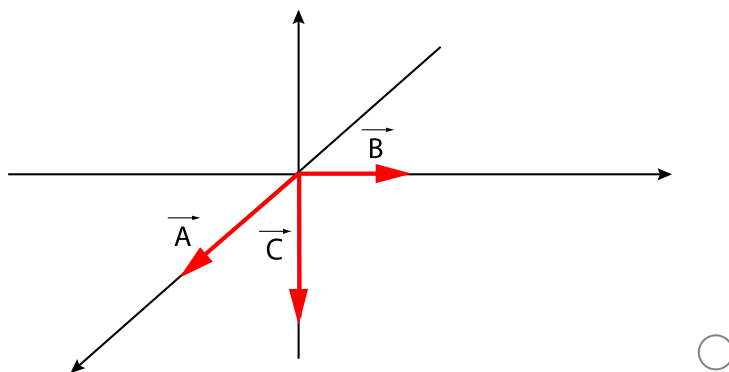


Na rysunku poniżej znajdują się dwa wektory, $\vec{A}$ i $\vec{B}$, skierowane wzdłuż osi układu odniesienia.



Który z poniższych rysunków poprawnie wskazuje wektor $\vec{C}$, będący iloczynem wektorowym $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$?





Ćwiczenie 7



Podaj definicję momentu pędu dla bryły sztywnej.

 =

×

$\vec{I}$

I

·

$\vec{\omega}$

$\vec{L}$

m

ω

Ćwiczenie 8



Dany jest walec i kula, oba o masie m i promieniu R . Bryły te obracają się z tą samą prędkością kątową ω wokół osi przechodzących przez ich środek masy. Które z tych ciał ma większy moment pędu?

- ☐ To zależy również od innych parametrów, nie można wywnioskować odpowiedzi z treści zadania
- ☐ Skoro mają taką samą masę i prędkość kątową, to znaczy, że mają ten sam moment pędu
- ☐ Ponieważ walec ma większy moment bezwładności niż kula, to przy tej samej prędkości kątowej walec ma większy moment pędu
- ☐ Ponieważ walec ma większy moment bezwładności niż kula, to przy tej samej prędkości kątowej walec ma mniejszy moment pędu

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Moment pędu punktu materialnego oraz moment pędu bryły sztywnej
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 6) posługuje się pojęciem momentu pędu punktu materialnego i bryły; stosuje do obliczeń związek między momentem pędu i prędkością kątową.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. dostrzega analogię między pojęciem pędu i momentu pędu, 2. definiuje moment pędu punktu materialnego oraz bryły sztywnej, 3. stosuje te pojęcia do rozwiązywania zadań rachunkowych.
Strategie i metody nauczania:	strategia eksperymentalno-obszerwacyjna
Formy zajęć:	- praca indywidualna, - pokaz.
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu, projektor multimedialny, sznur z obciążeniem
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel prezentuje prosty przykład ruchu postępowego – przedmiot zsuwający się po równi pochyłej (jeśli zaplecze na to pozwala – pojazd poruszający się po torze powietrznym) lub jadący po popchnięciu samochodzik, przypominając, że ciało o masie m poruszające się z prędkością $\vec{v}$ ma pęd $\vec{p} = m\vec{v}$. Nauczyciel rysuje tę sytuację na tablicy podkreślając, że w każdym momencie ruchu opis ten jest prawidłowy, tzn kierunki i wartości wektora pędu się nie zmieniają. Następnie nauczyciel bierze ciężarek na sznurku i zaczyna nim jednostajnie obracać. Po skończonej prezentacji nauczyciel rysuje tę sytuację na tablicy, zwracając uwagę, że tym razem wektor prędkości, a zatem również wektor pędu, nieustannie zmienia swój kierunek, nie zmieniając swojej wartości. Nauczyciel informuje, że do opisu układów będących w ruchu obrotowym należy stosować inne pojęcia niż do obiektów poruszających się ruchem postępowym – w tym wypadku zamiast pojęciem pędu będziemy się posługiwać pojęciem momentu pędu.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel włącza na projektorze film samouczek z niniejszego e-materiału, aby zaznajomić uczniów z pojęciem momentu pędu i przypomnieć pojęcie iloczynu wektorowego. Następnie nauczyciel rysuje na tablicy kilka przykładowych par wektorów skierowanych pod różnymi kątami względem siebie i o różnych długościach, a następnie prosi ochotników o narysowanie wektora będącego iloczynem wektorowym tych par wektorów. Po upewnieniu się, że wszyscy uczniowie rozumieją, że nowy wektor jest prostopadły do płaszczyzny wektorów będących czynnikami iloczynu wektorowego, nauczyciel przechodzi do zadań związanych z momentem pędu: kolejni ochotnicy rozwiązują na tablicy zadanie 3, 4 i 5. Nauczyciel pomaga wyjaśnić ewentualne niejasności.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel zwraca uwagę, że tak, jak istotną rolę pełnił w mechanice ruchu postępowego pęd, tak samo dla opisu ruchu obrotowego istotny będzie moment pędu. Jako zapowiedź powrotu do tematu zachowania momentu pędu nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie w domu zasady zachowania pędu.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań z zestawu ćwiczeń, których nie rozwiązano w trakcie lekcji, czyli 1, 2, 6, 7, 8 w celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości o momencie pędu.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Samouczek może być również wykorzystany przez uczniów po lekcji w celu utrwalenia materiału.