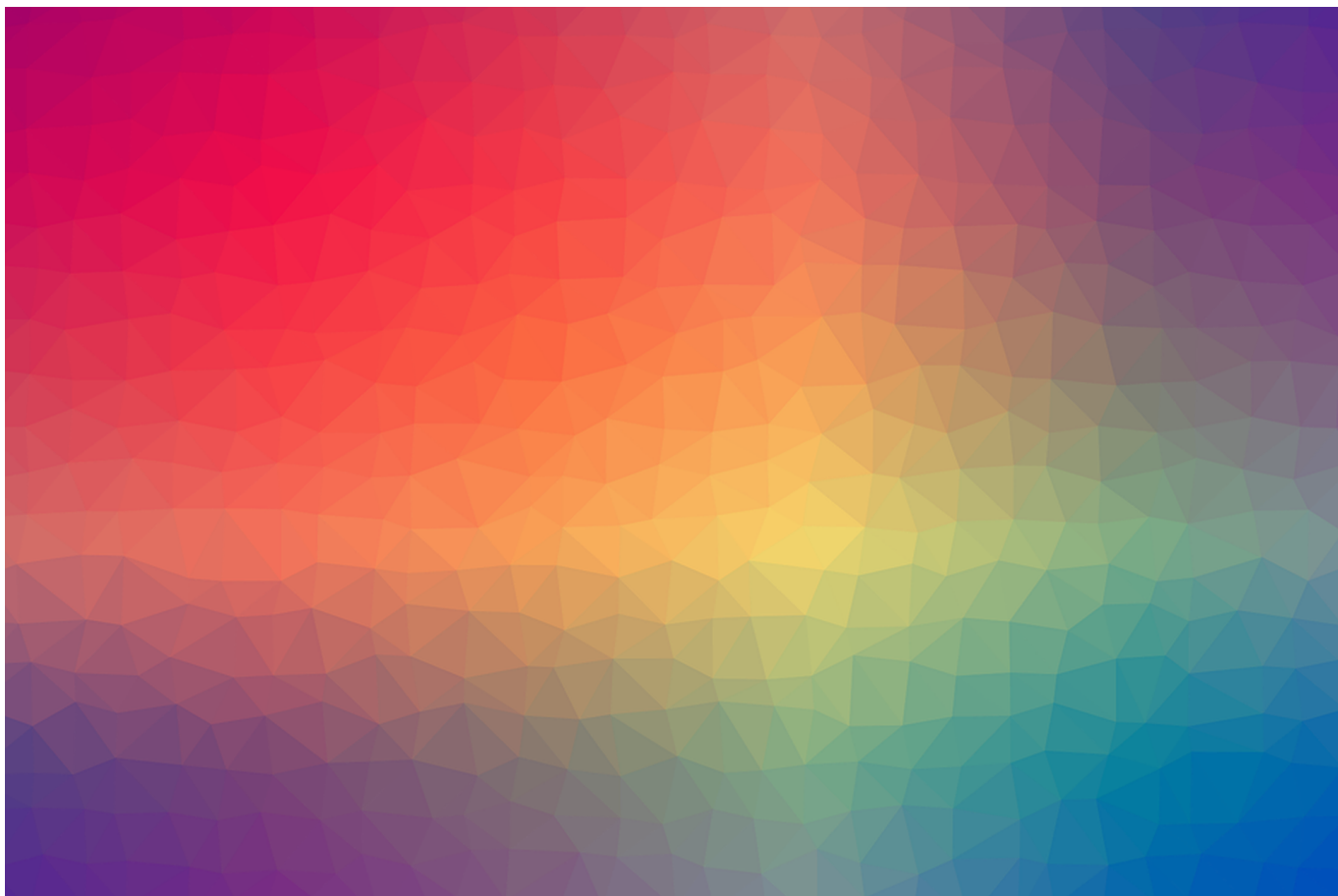




Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Źródło: Tim Evans, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Włoski matematyk, Girolamo Cardano, w 1545 roku w swoim dziele *Ars Magna* (Wielka Sztuka) rozważa taki oto problem:

„Gdyby ktoś kazał tobie wziąć liczbę 10 i podzielić ją na dwie części, tak by pomnożone jedna z drugą dały 40 – odpowiesz niemożliwe. Jednak rozwiążemy zagadkę dla ciebie.”

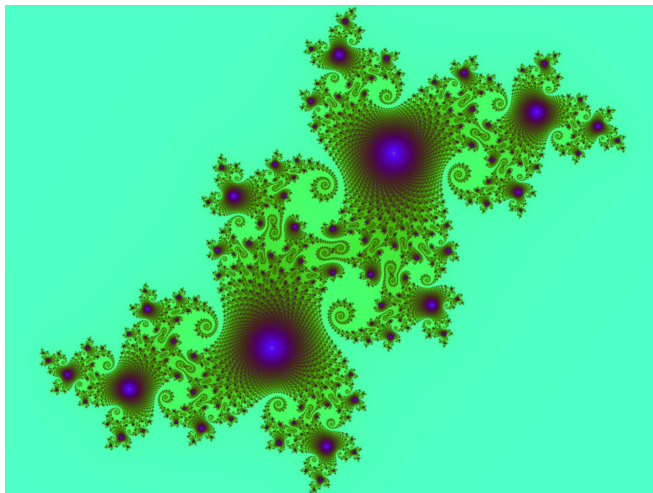
Rozwiążemy ten problem według pomysłu Cardano. Zapisujemy odpowiedni układ równań:
 $a + b = 10$ i $a \cdot b = 40$.

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe $a^2 - 10a + 40 = 0$, dla którego $\Delta = -60$.

Wydaje się, że równanie nie ma rozwiązania, ale nie przejmując się ujemnym wyróżnikiem, wyznaczmy pierwiastki równania: $5 - \sqrt{-15}$ i $5 + \sqrt{-15}$.

Sprawdzamy, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, że iloczyn uzyskanych liczb to 40, a ich suma to 10. Okazało się więc, że niemożliwe jest możliwe!

Pomysł Cardano doprowadził do wynalezienia liczb zespolonych, a zarazem



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

istnienia pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych. Liczby zespolone wykorzystuje się współcześnie między innymi do tworzenia fraktali.

My jednak, w tym materiale będziemy rozważać tylko liczby rzeczywiste, a więc takie, w których zabrania się wyznaczania pierwiastków stopnia parzystego z liczb ujemnych. Pamiętaj o tym!

Twoje cele

- Wykorzystasz pozyskane wcześniej umiejętności do usuwania niewymierności z mianownika ułamka.
- Dokonasz wyboru najefektywniejszej strategii prowadzącej do rozwiązania problemu związanego z przekształcaniem wyrażeń algebraicznych oraz arytmetycznych.

Przeczytaj

W tym materiale usystematyzujemy wiadomości na temat sposobów usuwania niewymierności z mianownika ułamka.

Jeśli w mianowniku ułamka znajduje się liczba niewymierna, staramy się tak przekształcić ułamek, aby w mianowniku znalazła się liczba wymierna, w miarę możliwości całkowita. Takie przekształcenie nazywamy **usuwaniem niewymierności z mianownika ułamka**.

Należy przy tym pamiętać, że w wyniku przekształcenia musimy otrzymać ułamek równy danemu.

Usuwanie liczby niewymiernej z mianownika ułamka

Przykład 1

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

W mianowniku ułamka znajduje się liczba niewymierna $\sqrt{6}$. Zatem, aby pozbyć się niewymierności z mianownika, mnożymy licznik i mianownik przez tę właśnie liczbę, czyli $\sqrt{6}$.

$$\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{36}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{6}-6}{6}$$

Przykład 2

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{3}{2\sqrt[3]{5}}$.

W mianowniku ułamka znajduje się iloczyn $2 \cdot \sqrt[3]{5}$. Tylko liczba $\sqrt[3]{5}$ jest niewymierna. Zatem, chcąc się pozbyć niewymierności z mianownika, mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt[3]{25}$.

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{25}}{2\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{2\sqrt[3]{125}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{10}$$

Usuwanie niewymierności stopnia drugiego z mianownika ułamka

Będziemy teraz rozważać sytuacje, w których w mianowniku ułamka znajduje się suma bądź różnica dwóch wyrażeń.

Skorzystamy przy tym ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Przykład 3

Usuniemy niewymierność z mianownika każdego z ułamków.

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{2}+2} &= \frac{4}{\sqrt{2}+2} \cdot \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{4(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{4}-4} = \frac{4(\sqrt{2}-2)}{2-4} = 4 - 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = \\ &= 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

Jeśli w mianowniku ułamka znajduje się suma więcej niż dwóch liczb niewymiernych, należy odpowiednio pogrupować wyrazy i ze wzoru skróconego mnożenia w niektórych przypadkach należy skorzystać dwa lub więcej razy.

Przykład 4

Chcemy **usunąć niewymierność z mianownika ułamka** $U = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, w pierwszej kolejności grupujemy wyrazy w mianowniku.

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}$$

Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez „sprzężenie” mianownika czyli $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}$ i korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}} \\ U &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5+2\sqrt{15}+3-2} \\ U &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{15}+6}\end{aligned}$$

Mnożymy ponownie licznik i mianownik przez „sprzężenie” – tym razem przez $2\sqrt{15} - 6$.

$$\begin{aligned}U &= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{15}-6)}{(2\sqrt{15}+6)(2\sqrt{15}-6)} = \frac{2\sqrt{75}-6\sqrt{5}+2\sqrt{45}-6\sqrt{3}+2\sqrt{30}-6\sqrt{2}}{60-36} \\ U &= \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{30}-6\sqrt{2}}{24} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{30}-3\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

Usuwanie niewymierności stopnia trzeciego z mianownika ułamka

W sytuacji, gdy w mianowniku ułamka występuje suma zawierająca pierwiastek stopnia trzeciego, sytuacja nieco się komplikuje. Gdyż wyrażenie, przez które mnożymy licznik i mianownik, jest już na ogół kikudziałaniowe. Dążymy bowiem do tego, aby skorzystać ze wzoru $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ lub ze wzoru $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Przykład 5

Liczbę $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ zapiszemy w postaci ułamka o mianowniku wymiernym. Rozszerzymy tak ułamek, aby wykorzystać wzór na różnicę sześcianów.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{4-2} = 1 + \sqrt[3]{2} + 0,5\sqrt[3]{4}$$

Przykład 6

Ułamek $\frac{4}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$ sprowadzimy do mianownika, w którym występują tylko liczby wymierne.

Zauważmy najpierw, że $1 - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ to niepełny kwadrat wyrażenia $1 - \sqrt[3]{3}$. Zatem, aby skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów, należy pomnożyć licznik i mianownik rozważanego ułamka przez $1 + \sqrt[3]{3}$.

$$\frac{4}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}} = \frac{4(1+\sqrt[3]{3})}{(1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})(1+\sqrt[3]{3})} = \frac{4(1+\sqrt[3]{3})}{1+(\sqrt[3]{3})^3} = 1 + \sqrt[3]{3}$$

Słownik

usunąć niewymierność z mianownika ułamka

pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez taki czynnik, aby w mianowniku otrzymać liczbę wymierną (różną od zera)

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zadania, a następnie porównaj rozwiązania.

Polecenie 2

Oblicz wartość liczbową ułamka $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, jeśli liczby x i y są dodatnie oraz takie, że $x \neq y$ i $x + y = 5, x \cdot y = 4$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ułamek $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$ jest równy

☐ $1 - 0,2\sqrt{5}$

☐ $1 - \sqrt{5}$

☐ $1 + 0,2\sqrt{5}$

☐ $1 + \sqrt{5}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

☐ Liczba $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ jest równa $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

☐ Liczba o połowę mniejsza od $\frac{20}{5\sqrt[3]{2}}$ to $\sqrt[3]{4}$.

☐ Liczba, przez którą można pomnożyć $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$, aby usunąć niewymierność z mianownika to $\sqrt[3]{3}$.

☐ Liczba $\frac{5}{\sqrt[3]{25}} - \sqrt[3]{5}$ jest ujemna.

Ćwiczenie 3



Dopasuj do liczb ich przybliżenia dziesiętne.

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$$

1,5

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

2,41

$$\frac{3}{3-\sqrt{3}}$$

5

$$\frac{\sqrt{24}+\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$$

2,37

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$ można pomnożyć licznik i mianownik tego ułamka przez .

Liczba jest rozwiązaniem równania $(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})x = 4$.

Liczba $\frac{10}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}}$ różni się od liczby o $\sqrt[3]{3}$.

$$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{21}$$

$$\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21}$$

$$\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{7}$$

Ćwiczenie 5



Jeśli $a = 2 \cdot 4^{-\frac{1}{3}}$ i $b = 3 \cdot (\sqrt[3]{4} - 1)^{-1}$ to

☐ $a = b - 1$

☐ $a < b$

☐ $a - b = \sqrt[3]{4}$

☐ $a > b$

Ćwiczenie 6



Liczba $\frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ jest liczbą

☐ niewymierną ujemną

☐ naturalną

☐ całkowitą ujemną

☐ niewymierną dodatnią

Ćwiczenie 7



Liczba $\left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^{-1}$ jest równa

☐ $\sqrt[3]{9}$

☐ $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

☐ $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$

☐ $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}$

☐ $\sqrt[3]{6}$

Ćwiczenie 8



Rozwiązaniem równania $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{-2} - x = 0$ jest liczba

☐ 0

☐ -2

☐ 0,5

☐ -1

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Grupa docelowa:

II etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje pozyskane wcześniej umiejętności do usuwania niewymierności z mianownika ułamka
- analizuje problem związany z usuwaniem niewymierności z mianownika ułamka i dokonuje wyboru najefektywniejszej strategii prowadzącej do jego rozwiązania

- planuje swoje dalsze działania, mające doprowadzić do pogłębienia problemów rozważanych w czasie zajęć

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- okienko informacyjne

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby w pierwszej części lekcji każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer
- komputery z dostępem do Internetu, aby uczniowie mieli okazję samodzielnie pracować
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie w domu sposobu wykonywania działań na ułamkach.

Faza wstępna:

Uczniowie w grupach, metodą okienek informacyjnych, przypominają wiadomości związane ze wzorami skróconego mnożenia – w każdym okienku powinna znaleźć się jedna informacja.

Grupy krótko prezentują swoje pomysły – wykonane plakaty umieszczają na ścianach klasy tak, aby można było je wielokrotnie wykorzystać.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach. Metodą analizy przypadku zapoznają się materiałami zamieszczonymi w sekcji Przeczytaj, oraz oglądają galerię zdjęć interaktywnych.
2. Grupy układają wzajemnie dla siebie zadania podobnego typu. Nauczyciel kontroluje poprawność ich rozwiązania.
3. Uczniowie wspólnie tworzą algorytmy usuwania niewymierności z mianownika ułamka (w przypadku, gdy w mianowniku jest iloczyn lub poszczególna liczba niewymierna, gdy w mianowniku ułamka znajduje się suma/różnica z pierwiastkiem stopnia 2 i wreszcie, gdy w mianowniku znajduje się suma/różnica zawierająca pierwiastek stopnia 3).

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne zawarte w sekcji „Przeczytaj” – w ramach krótkiego sprawdzianu.
2. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. Uczniowie ci również dokonują oceny koleżeńskich prac grup i samooceny.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest ułożenie wyrażenia co najmniej 3 działaniowego, zawierającego ułamki, w mianownikach których stoi liczba niewymierna. A następnie usunięcie niewymierności z mianowników ułamków i wykonanie wskazanych działań.

Materiały pomocnicze:

Działania na pierwiastkach

Wskazówki metodyczne:

Z prezentacją interaktywną i materiałami z sekcji „Przeczytaj”, wybrani uczniowie mogą zapoznać się w domu i w czasie zajęć występować w charakterze ekspertów.