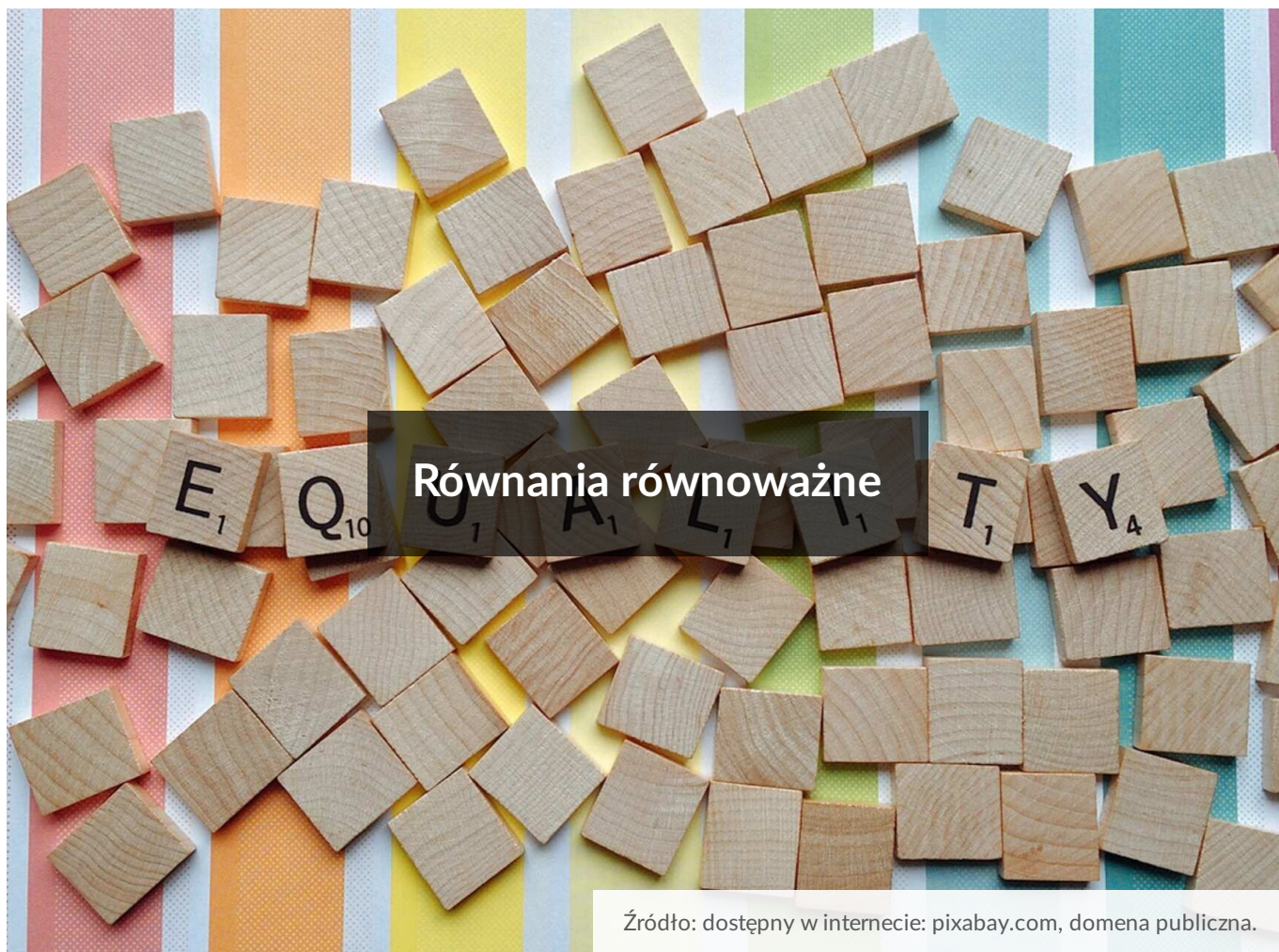




Równania równoważne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wiesz już, że równania można zilustrować za pomocą wagi, a także, że rozwiązania możesz szukać przez podstawianie kolejnych liczb. Kiedy masz do dyspozycji więcej niż jedną wagę, możesz układać dostępne przedmioty w dowolnej konfiguracji i sprawdzać, kiedy szalki wagi będą w równowadze. Czy ułatwi Ci to znalezienie rozwiązania?

Twoje cele

- Sformułujesz definicję równań równoważnych.
- Rozpoznasz równania równoważne.
- Dopiszesz równania równoważne do danych równań.
- Sformułujesz twierdzenia o równaniach równoważnych.
- Wykorzystasz twierdzenia o równaniach równoważnych do rozwiązywania równań.

Przeczytaj

Sprawdzimy, które równanie z występujących w poniższych przykładach spełnia liczba 2.

Przykład 1

$$3x - 1 = x + 3$$

Do lewej i prawej strony równania podstawimy w miejsce niewiadomej x liczbę 2 i obliczamy wartość otrzymanego wyrażenia.

$$L = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$P = 2 + 3 = 5$$

Okazało się, że dla $x = 2$ lewa i prawa strona równania przyjmuje tę samą wartość. Oznacza to, że liczba 2 jest rozwiązaniem tego równania.

$$L = P$$

Przykład 2

$$-2 \cdot (x - 2) = -2x + (1 - 2x)$$

Do lewej i prawej strony równania podstawimy w miejsce niewiadomej x liczbę 2 i obliczymy wartość wyrażenia arytmetycznego.

$$L = -2 \cdot (2 - 2) = -2 \cdot 0 = 0$$

$$P = -2 \cdot 2 + (1 - 2 \cdot 2) = -4 + (1 - 4) = -4 - 3 = -7$$

Okazało się, że dla $x = 2$ lewa i prawa strona równania przyjmują różne wartości. Oznacza to, że liczba 2 nie jest rozwiązaniem tego równania.

$$L \neq P$$

Przykład 3

$$3 - 2x = \frac{x}{2} - 2$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach do lewej i prawej strony równania podstawimy w miejsce niewiadomej x liczbę 2 i obliczamy wartość otrzymanego wyrażenia.

$$L = 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$P = \frac{2}{2} - 2 = 1 - 2 = -1$$

Okazało się, że dla $x = 2$ lewa i prawa strona równania przyjmuje tę samą wartość. Oznacza to, że liczba 2 jest rozwiązaniem tego równania.

$$L = P$$

Równania:

$3x - 1 = x + 3$ i $3 - 2x = \frac{x}{2} - 2$ spełnia liczba 2. Równania te mają taki sam zbiór rozwiązań.

Definicja: Równania równoważne

Mówimy, że równania z tymi samymi niewiadomymi, które posiadają taką samą dziedzinę są równoważne wtedy, gdy posiadają taki sam zbiór rozwiązań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które je spełniają lub wykazać, że równanie to nie ma rozwiązania. W tym celu zapisujemy równania równoważne danemu, pamiętając o tym, że:

- do obu stron równania możemy dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
- obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{2}x - 3 = 2 \cdot (x + 1)$ metodą równań równoważnych.

$$\frac{1}{2}x - 3 = 2 \cdot (x + 1)$$

Najpierw pozbędziemy się nawiasu.

$$\frac{1}{2}x - 3 = 2x + 2$$

Od obu stron równania odejmiemy jednomian $2x$.

$$\frac{1}{2}x - 2x - 3 = 2$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-1\frac{1}{2}x - 3 = 2$$

Do obu stron równania dodamy liczbę 3.

$$-1\frac{1}{2}x - 3 + 3 = 2 + 3$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-1\frac{1}{2}x = 5$$

Podzielimy obie strony równania przez liczbę $-1\frac{1}{2}$.

$$-1\frac{1}{2}x = 5 \quad | : (-1\frac{1}{2})$$

$$x = 5 : (-\frac{3}{2})$$

$$x = 5 \cdot (-\frac{2}{3})$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

$$x = -3\frac{1}{3}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $(-3\frac{1}{3})$.

Przykład 5

Sprawdzimy, czy równania $2x - 3 \cdot (1 - x) = 4$ i $4x - 2 = 5 - x$ są równoważne.

Aby równania były równoważne muszą mieć ten sam zbiór rozwiązań.

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem pierwszego równania metodą równań równoważnych.

$$2x - 3 \cdot (1 - x) = 4$$

$$2x - 3 + 3x = 4$$

$$5x - 3 = 4$$

$$5x = 4 + 3$$

$$5x = 7 \quad | : 5$$

$$x = \frac{7}{5}$$

$$x = 1\frac{2}{5}$$

Teraz rozwiążemy drugie równanie metodą [równań równoważnych](#).

$$4x - 2 = 5 - x$$

$$4x + x - 2 = 5$$

$$5x - 2 = 5$$

$$5x = 5 + 2$$

$$5x = 7 \quad | : 5$$

$$x = \frac{7}{5}$$

$$x = 1\frac{2}{5}$$

Liczba $1\frac{2}{5}$ jest rozwiązaniem obu równań liniowych. Równania te nie posiadają innych rozwiązań, poza liczbą $1\frac{2}{5}$. Zatem równania te posiadają ten sam zbiór rozwiązań, czyli są równoważne.

Słownik

równania równoważne

równania z tymi samymi niewiadomym, które posiadają taki sam zbiór rozwiązań

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem pokazującym metodę rozwiązywania równań za pomocą równań równoważnych.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie metodą równań równoważnych

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 2\right) - 2x = \frac{1}{4} \cdot (2x - 8)$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania równoważne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję równań równoważnych,
- rozpoznaje równania równoważne,
- dopisuje równania równoważne do danych równań,
- formułuje twierdzenia o równaniach równoważnych,
- wykorzystuje twierdzenia o równaniach równoważnych do rozwiązywania równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wędrujące plakaty
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych i infografiki

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie w parach przypominają sposoby wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych, ze szczególnym uwzględnieniem mnożenia sumy algebraicznej przez liczbę oraz wykonywaniem redukcji wyrażień podobnych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 5 osobowych wykorzystują metodę wędrujących plakatów. Pierwsza osoba zapisuje na kartonie proste równanie liniowe, którego rozwiązaniem jest wskazana przez nauczyciela liczba. Kolejna osoba z grupy dopisuje inne równanie równoważne itd. Uczniowie wraz z nauczycielem omawiają pracę w grupach i dzielą się z innymi grupami swoimi przykładami równań równoważnych.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają infografikę i konsultują wykonania poleceń umieszczonych pod infografiką.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6 oraz 9 – 10.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Rozwiązanie równania](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli dotyczącej wyznaczania zbioru rozwiązań nierówności.