



Pole powierzchni ostrosłupa

Materiał składa się z sekcji: "Siatka ostrosłupa", "Pole powierzchni ostrosłupa".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Przykłady – przykłady siatek ostrosłupów, w tym czworościanu, obliczanie pola powierzchni ostrosłupów.

Ćwiczenia – siatka ostrosłupa, obliczanie pola powierzchni ostrosłupa, obliczanie elementów ostrosłupa o danym polu powierzchni.

Pole powierzchni ostrosłupa

W tym materiale dowiesz się, jak rysować siatki ostrosłupów oraz, w jaki sposób obliczać pole powierzchni ostrosłupa. Rozwiązesz zadania dotyczące tych zagadnień.

Siatka ostrosłupa

Jeżeli chcemy zbudować pudełko o konkretnych wymiarach, najpierw należy przygotować jego siatkę. Łatwo wtedy obliczyć, ile cm^2 kartonu potrzeba, aby wykonać pudełko.

Przykład 1

Zapoznaj się z poniższymi animacjami, aby dowiedzieć się jak powstaje siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RIV54bZuFnQiC>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki w kształcie brył. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje ostrosłup. Następnie dwa jednakowe ostrosłupy rozkładają się na dwie różne siatki ostrosłupa.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RUkg1A7f4sEho>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje dwie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, które składają się w jednakowe ostrosłupy. Ostrosłup zamienia się w drewniany klocek leżący między innymi klockami.

Przykład 2

Opiszemy, jak na podstawie siatki ostrosłupa określić, czy jest to ostrosłup prawidłowy.

Rozwiązanie:

Każdy ostrosłup prawidłowy musi mieć w podstawie wielokąt foremny oraz wysokość tego ostrosłupa musi opadać na środek geometryczny jego podstawy. Oznacza to, że siatka ostrosłupa jest siatką ostrosłupa prawidłowego wtedy, kiedy składa się z jednego

wielokąta foremnego, a pozostałe figury w tej siatce to przystające trójkąty równoramienne.

Przykład 3

Odpowiemy na pytania:

1. W kształcie jakich trójkątów są ściany boczne ostrosłupa prostego?
2. Jak położone są względem podstawy ściany boczne ostrosłupa prostego?

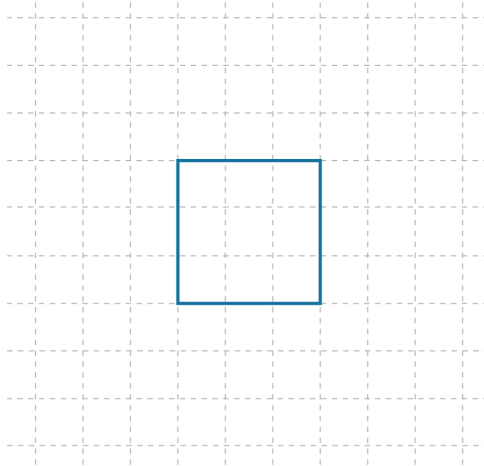
Rozwiązanie:

1. Zauważmy, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa prostego mają równe długości. Zatem trójkąty, które znajdują się w ścianach bocznych tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.
2. Ponadto, z faktu, że długości wszystkich krawędzi bocznych ostrosłupa prostego są równe możemy zauważyć, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem.

Przykład 4

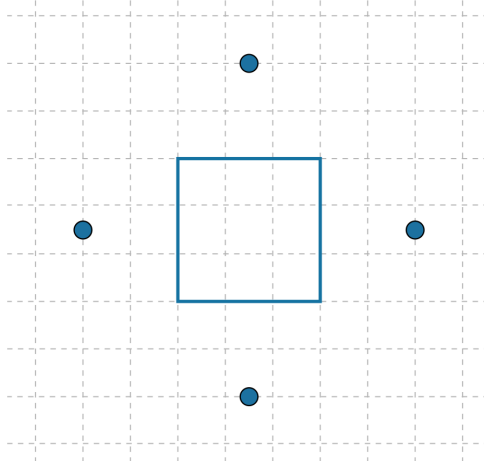
Objaśnimy na podstawie rysunków, jak narysować siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Rysowanie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego rozpoczynamy od narysowania jego podstawy, którą jest kwadrat.



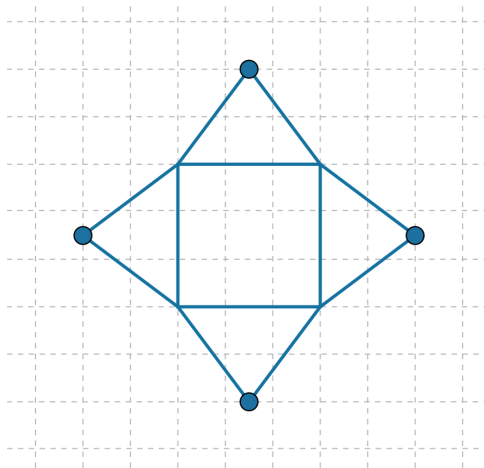
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Następnie zaznaczamy cztery punkty, które znajdują się na symetrycznych wszystkich boków tego kwadratu i odległość tych punktów od odpowiednich wierzchołków jest taka sama. Odległość ta musi być większą niż połowa długości boku kwadratu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W ostatnim etapie łączymy wierzchołki kwadratu z zaznaczonymi punktami w taki sposób, jak pokazano na poniższym rysunku.

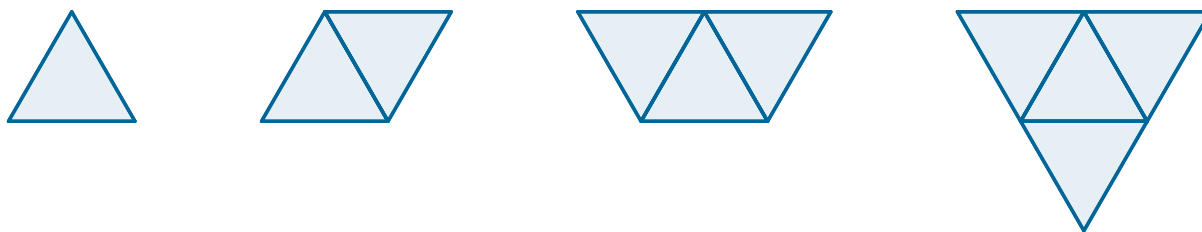


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego składa się z kwadratu oraz czterech przystających trójkątów równoramiennych.

Przykład 5

Objaśnimy na podstawie rysunku, jak narysować siatkę czworoscianu foremnego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rysowanie siatki czworoscianu foremnego rozpoczynamy od narysowania trójkąta równobocznego. Następnie do jednego z boków tego trójkąta dorysowujemy kolejny trójkąt równoboczny. Zauważmy, że trójkąty te są do siebie przystające. W kolejnych etapach postępujemy analogicznie dorysowując trójkąty równoboczne do pozostałych boków pierwszego z narysowanych trójkątów. Otrzymujemy wówczas siatkę czworoscianu foremnego, która składa się z czterech przystających trójkątów równobocznych. Możemy zauważyć, że siatka ta ma kształt trójkąta równobocznego o boku dwa razy dłuższym niż krawędź tego czworoscianu foremnego.

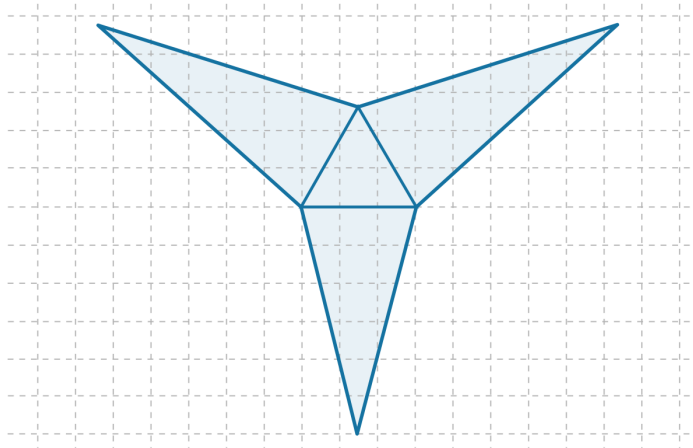
Siatka ostrosłupa składa się z wielokąta będącego podstawą ostrosłupa i trójkątów – ścian bocznych.

Pole powierzchni ostrosłupa

Przykład 6

Rysunek przedstawia siatkę, z której można skleić model ostrosłupa prawidłowego.

Obliczmy pole podstawy, pole ściany bocznej oraz pole powierzchni ostrosłupa, przyjmując, że jedna kratka ma długość 1 cm.



Zauważmy, że podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości 3 cm, więc jego pole możemy obliczyć ze wzoru $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a jest długością boku tego trójkąta. Mamy zatem, że pole podstawy wynosi

$$\frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Ponadto wysokość ściany bocznej ma długość 6 cm, a stąd pole ściany bocznej wynosi

$$\frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}^2.$$

Ponieważ wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi, to mają one takie samo pole powierzchni. Otrzymujemy, więc, że pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} + 9 + 9 + 9 = 27 + \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Mając siatkę ostrosłupa, można obliczyć jego pole powierzchni.

Ważne!

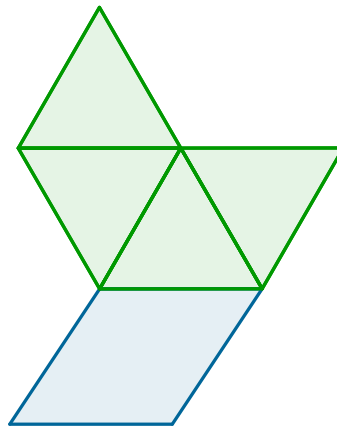
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pola podstawy i sumą pól trójkątów będących ścianami bocznymi.

$$P_c = P_p + P_b$$

P_c – pole powierzchni całkowitej;

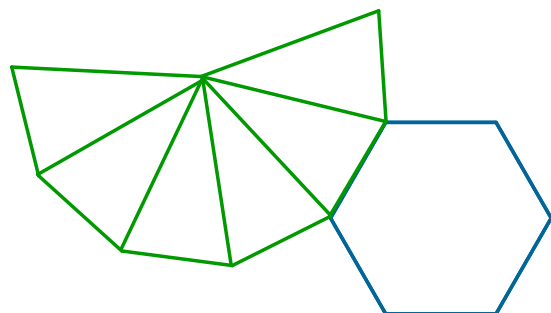
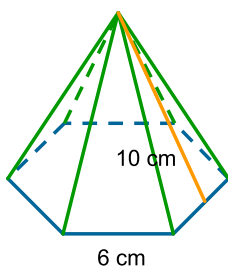
P_p – pole podstawy;

P_b – pole powierzchni bocznej.



Przykład 7

Obliczymy pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm.



Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny. Obliczamy jego pole – jako sumę pól sześciu przystających trójkątów równobocznych o boku długości 6 cm.

$$P_p = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2$$

$$P_p = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Każda ze ścian bocznych ostrosłupa jest trójkątem o podstawie długości 6 cm i wysokości 10 cm. Obliczamy pole powierzchni bocznej, czyli sumę pól sześciu przystających trójkątów.

$$P_b = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10$$

$$P_b = 180 \text{ cm}^2.$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej – sumę pola podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

$$P_c = 54\sqrt{3} + 180$$

$$P_c = 18(3\sqrt{3} + 10) \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź:

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $18(3\sqrt{3} + 10) \text{ cm}^2$.

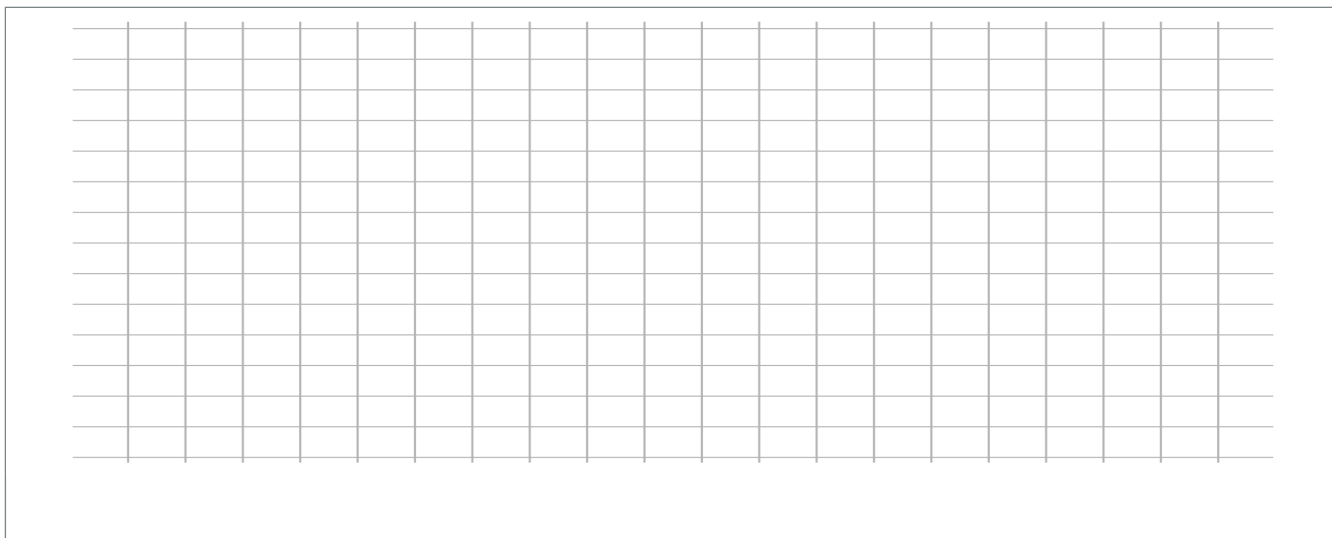
Ćwiczenie 1



Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego, wiedząc, że wysokość jego ściany bocznej jest równa 5 cm, a krawędź podstawy ma długość 4 cm i jest

1. trójkątem,
2. czworokątem,
3. sześciokątem.

Przyjmij, że jedna kratka ma długość 1 cm.

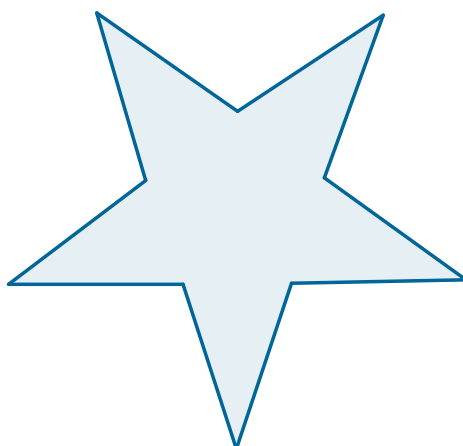


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z poniższą grafiką. Rysunek przedstawia siatkę, z której sklejono pudełko.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jaka figura będzie podstawą tego pudełka? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ sześciokąt

☐ pięciokąt

☐ trapez

☐ trójkąt

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Wysokością ostrosłupa jest jedna z krawędzi bocznych. Jakim trójkątem jest każda ściana boczna tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ prostokątnym

☐ równobocznym

☐ równoramiennym

☐ rozwartokątnym

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Pole powierzchni czworokątna foremnego jest równe $4\sqrt{3}$. Ile jest równa suma długości krawędzi tego czworokątna? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 12

☐ 48

☐ $6\sqrt{3}$

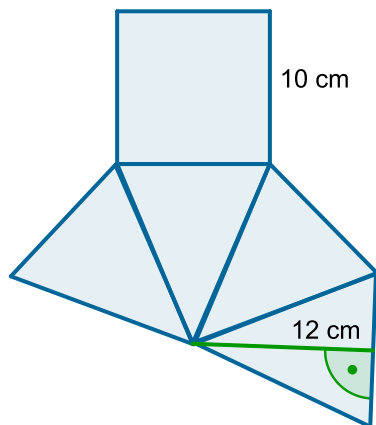
☐ 24

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawia rysunek.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Wysokość ściany bocznej pewnego ostrosłupa jest równa 8 cm, a długość krawędzi jego podstawy jest równa 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa prawidłowego w podanych przypadkach. Uzupełnij poniższe zdania odpowiednimi wyrażeniami. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz odpowiednie wyrażenie w każdym zdaniu.

- Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt.
Pole takiego ostrosłupa wynosi cm^2 .
- Podstawą tego ostrosłupa jest czworokąt.
Pole takiego ostrosłupa wynosi cm^2 .
- Podstawą tego ostrosłupa jest sześciokąt.
Pole takiego ostrosłupa wynosi cm^2 .

$96 + 24\sqrt{3}$ 60 80 $52 + 5\sqrt{3}$ $48 + 4\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 39 dm^2 . Podstawą jest kwadrat o boku 3 dm. Ile wynosi pole powierzchni jednej ściany bocznej? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 7,5 dm^2

☐ 5 dm^2

☐ 12,5 dm^2

☐ 6 dm^2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe 3. Krawędź podstawy ma długość 0,5. Oblicz wysokość ściany bocznej.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm, a pole powierzchni bocznej jest równe 160 cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy jest równa 14 cm, a krawędź boczna ma długość 10 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym pole podstawy jest równe 36 cm^2 , a krawędź boczna ma długość 10 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Krawędź czworoszczanu foremnego ma długość 4 cm. Ile wynosi pole powierzchni tego czworoszczanu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

☐ $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

☐ 16 cm^2

☐ 12 cm^2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $8\sqrt{3}$. Kąt między wysokością ostrosłupa i wysokością ściany bocznej ma miarę 60° . Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 20 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Podstawą ostrosłupa jest romb. Spodek wysokości ostrosłupa leży na przecięciu przekątnych podstawy. Dłuższa krawędź boczna ma 24 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Kąt nachylenia krótszej krawędzi bocznej do podstawy ma miarę 60° . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm. Dwie przeciwległe krawędzie boczne ostrosłupa oraz przekątna podstawy tworzą trójkąt równoramienny. Ramię tego trójkąta ma długość 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Ośmiościan foremny to bryła, którą otrzymujemy, skleając podstawami dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Oblicz pole powierzchni ośmiościanu foremnego, którego krawędzie mają długość 8 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Piramida Cheopsa przypomina kształtem ostrosłup prawidłowy czworokątny. Krawędź jej podstawy ma długość 230 m, a wysokość 146 m. Oblicz pole powierzchni bocznej piramidy.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.