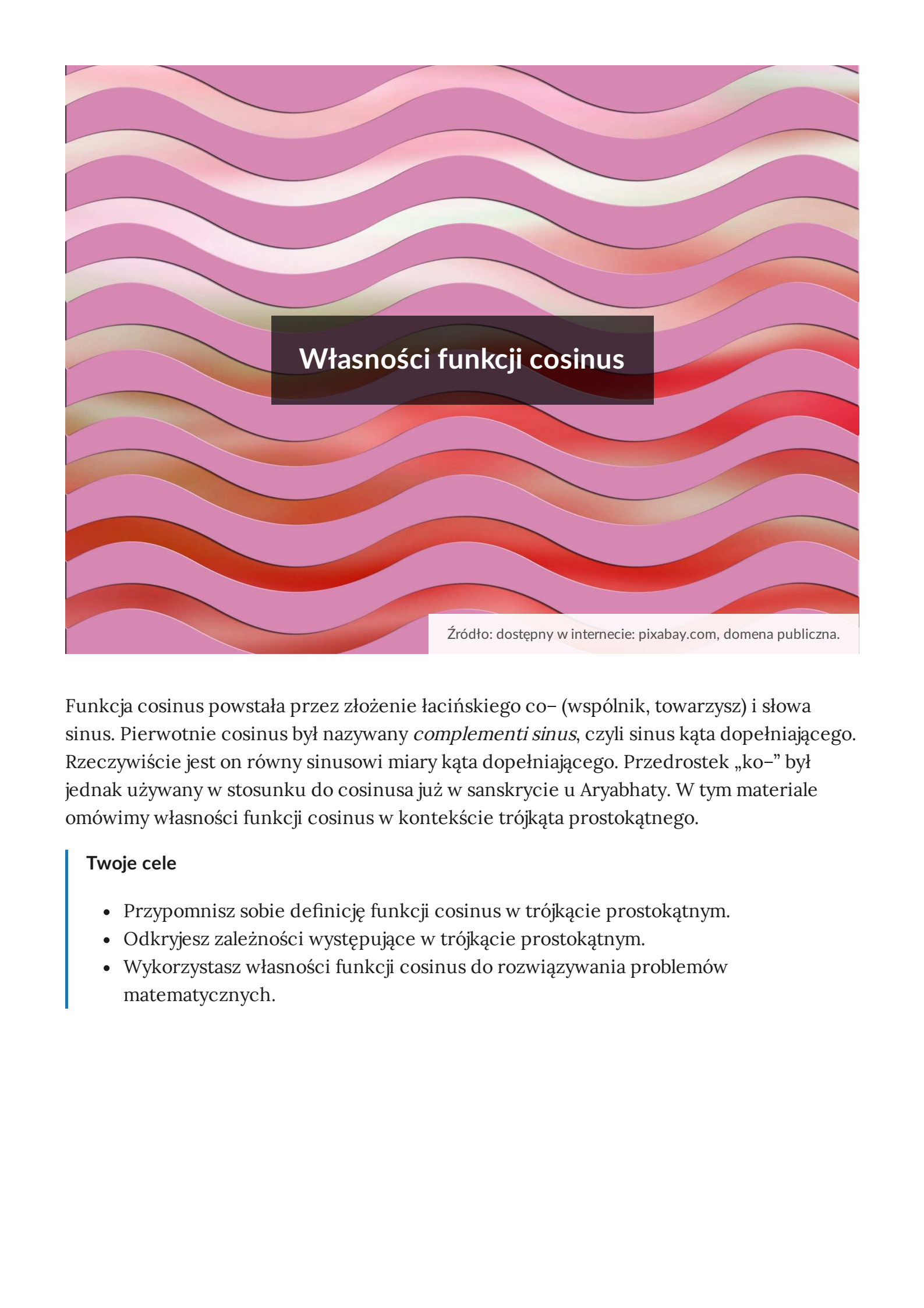




Własności funkcji cosinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności funkcji cosinus

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Funkcja cosinus powstała przez złożenie łacińskiego co- (wspólnik, towarzysz) i słowa sinus. Pierwotnie cosinus był nazywany *complementi sinus*, czyli sinus kąta dopełniającego. Rzeczywiście jest on równy sinusowi miary kąta dopełniającego. Przedrostek „ko-” był jednak używany w stosunku do cosinusa już w sanskrycie u Aryabhaty. W tym materiale omówimy własności funkcji cosinus w kontekście trójkąta prostokątnego.

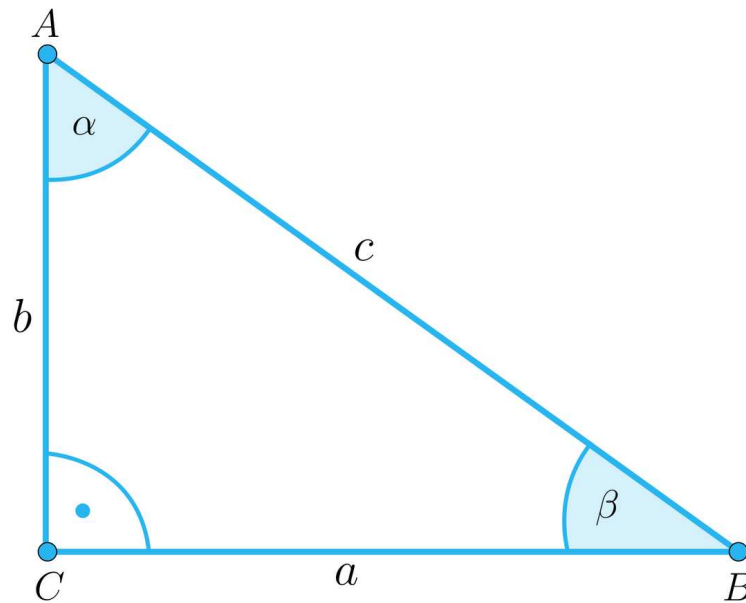
Twoje cele

- Przypomnisz sobie definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym.
- Odkryjesz zależności występujące w trójkącie prostokątnym.
- Wykorzystasz własności funkcji cosinus do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.



Do oznaczenia funkcji cosinus używa się skrótu „**cos**”.

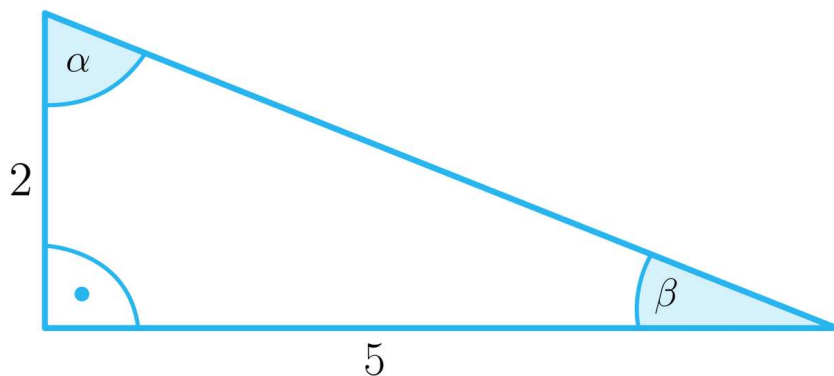
Stosując oznaczenia z rysunku mamy, że przyprostokątną leżącą przy kącie α jest bok o długości b a przyprostokątną leżącą naprzeciwko kąta β jest bok o długości a .

Zatem, zgodnie z definicją, mamy: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\cos \beta = \frac{a}{c}$.

Z przyjętych oznaczeń wynika, że $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$.

Przykład 1

Obliczymy wartości cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym z rysunku.



Oznaczmy długość przeciwprostokątnej jako x .

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $2^2 + 5^2 = x^2$.

Z równania wynika, że $x^2 = 29$, zatem $x = \sqrt{29}$ lub $x = -\sqrt{29}$.

Ponieważ $x > 0$, więc $x = \sqrt{29}$.

Z definicji funkcji cosinus otrzymujemy, że:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\cos \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Ważne!

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi zależność:

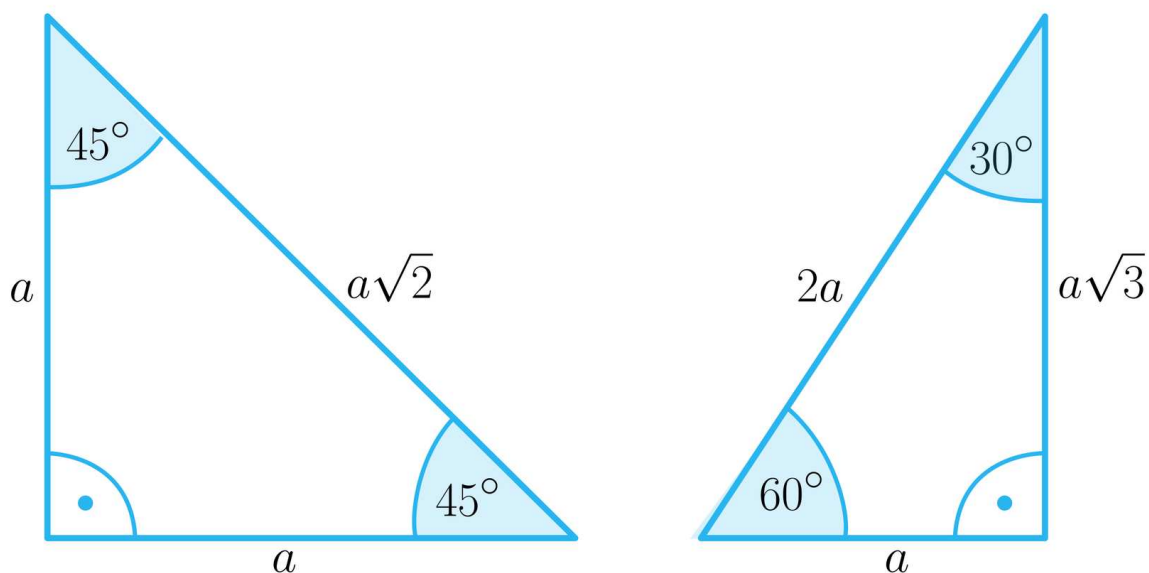
$$0 < \cos \alpha < 1$$

Wyjaśnienie tej nierówności można zapisać w dwóch krokach:

1. nierówność $\cos \alpha > 0$ wynika wprost z definicji funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym,
2. ponieważ w dowolnym trójkącie prostokątnym długość przyprostokątnej jest zawsze mniejsza od długości przeciwprostokątnej, zatem:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} < \frac{c}{c} = 1.$$

Wyznamy wartości cosinusów niektórych kątów ostrych. Wykorzystamy do tego trójkąty charakterystyczne.



Korzystając z definicji funkcji cosinus, otrzymujemy, że:

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Przykład 2

Wyznamy wartość wyrażenia $\frac{2 \cos 30^\circ - \cos 60^\circ}{3 \cos 45^\circ}$.

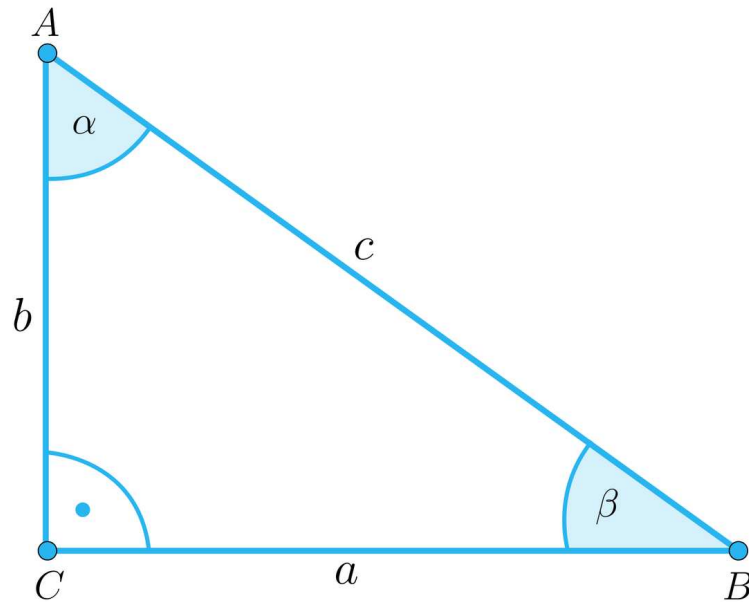
Po podstawieniu mamy:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos 30^\circ - \cos 60^\circ}{3 \cos 45^\circ} &= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Przykład 3

Wiadomo, że suma **cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym** wynosi $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
Obliczymy iloczyn cosinusów tych kątów.

Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Z rysunku mamy, że $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\cos \beta = \frac{a}{c}$.

Wiadomo, że $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Stosując oznaczenia z rysunku, otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Podnosząc obie strony równania do kwadratu, mamy, że:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2.$$

Po przekształceniu równanie jest postaci:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{20}{9}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ więc } \frac{c^2 + 2ab}{c^2} = \frac{20}{9}.$$

Równanie możemy zapisać w postaci $1 + \frac{2ab}{c^2} = \frac{20}{9}$.

Zatem $\frac{ab}{c^2} = \frac{11}{18}$, więc $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{11}{18}$.

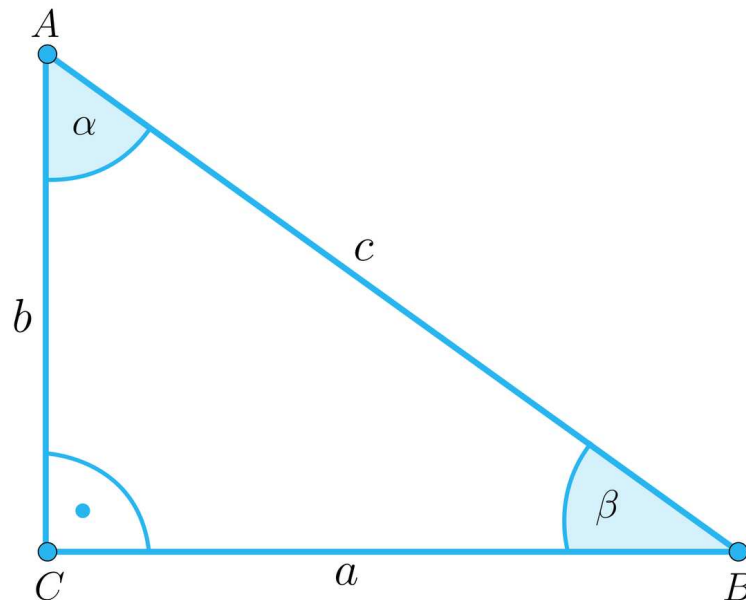
Po podstawieniu, zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami, otrzymujemy:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{11}{18}.$$

Przykład 4

Wyznamy długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 10, jeżeli wiadomo, że cosinus jednego kąta ostrego jest dwa razy większy od cosinusa drugiego kąta ostrego.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z warunków zadania wynika, że $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ oraz $c = 10$.

Z trójkąta prostokątnego z rysunku mamy, że $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\cos \beta = \frac{a}{c}$.

Po podstawieniu do zależności $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ mamy, że:

$$\frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}, \text{ czyli } b = 2a.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że

$$c^2 = a^2 + (2a)^2, \text{ więc } c = \sqrt{5}a.$$

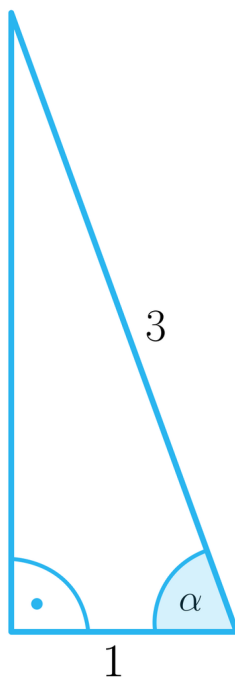
Otrzymujemy równanie $10 = \sqrt{5}a$, zatem $a = 2\sqrt{5}$.

Przyprostokątne mają więc długości $a = 2\sqrt{5}$ oraz $b = 4\sqrt{5}$.

Przykład 5

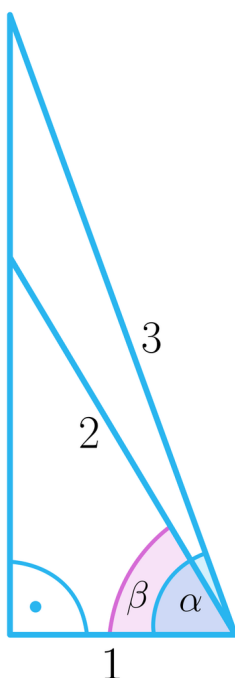
Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, to $\alpha > 60^\circ$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia, jak na rysunku:



Z rysunku możemy odczytać, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Następnie dorysujmy, tak jak pokazano na rysunku, odcinek o długości 2 oraz zaznaczmy kąt β .



Z rysunku mamy, że $\cos \beta = \frac{1}{2}$, co oznacza że $\beta = 60^\circ$.

Ponieważ $\alpha > \beta$, więc $\alpha > 60^\circ$.

Ważne!

Funkcja cosinus jest funkcją malejącą dla $\alpha \in (0, 90^\circ)$.

Słownik

cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

Polecenie 2

Wiadomo, że iloczyn cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi $\frac{1}{6}$. Wyznacz sumę cosinusów tych kątów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeżeli $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$, to:

☐ $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

☐ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

☐ $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary wyrażenie z odpowiadającą mu wartością.

$\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 30^\circ + \cos 45^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ}$

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

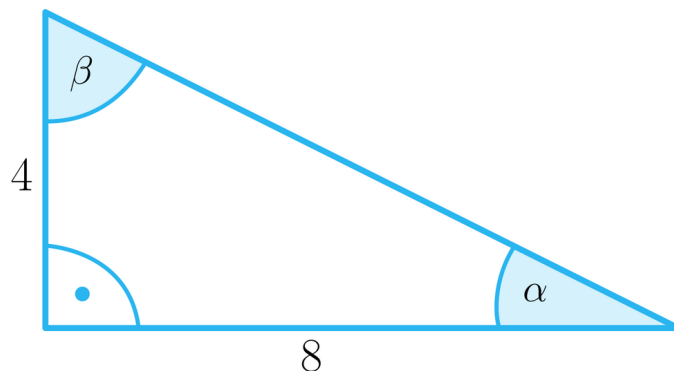
$\frac{\cos 45^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 3



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Wybierz wszystkie poprawne wartości funkcji trygonometrycznych kątów z rysunku.

☐ $\cos(90^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

☐ $\cos(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

☐ $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

☐ $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 4



Uporządkuj wartości funkcji sinus kątów α , β , γ , δ tak, aby ich miary były ułożone rosnąco:

$\cos \beta = 0,72$ ↕

$\cos \delta = \frac{1}{3}$ ↕

$\cos \alpha = \frac{2}{5}$ ↕

$\cos \gamma = \frac{7}{8}$ ↕

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli wartość cosinusa jednego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest dwa razy większa od wartości cosinusa drugiego kąta ostrego w tym trójkącie, a przeciwprostokątna ma długość 5, to dłuższa przyprostokątna ma długość , a obwód wynosi .

Ćwiczenie 6



Jeżeli w pewnym trójkącie prostokątnym iloczyn cosinusów kątów ostrych wynosi $\frac{1}{4}$, to kwadrat sumy wartości tych cosinusów wynosi:

☐ $\frac{1}{16}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $\frac{5}{4}$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst odpowiednią liczbą.

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $2\sqrt{2}$ oraz 4 lub w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $2\sqrt{2}$ oraz cosinus większego kąta ostrego wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że suma kwadratów cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 1.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności funkcji cosinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym;
- oblicza wartości funkcji cosinus dla podanych kątów;
- odkrywa zależności dla cosinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- z użyciem e-podręcznika;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Infografice i ćwiczenia interaktywne;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: *Własności funkcji cosinus* i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Infografika” – „Obejrzyj infografikę, a następnie wykonaj polecenie” – prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione – nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania

jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Własności funkcji cosinus” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Własności funkcji cosinus”).

Materiały pomocnicze:

- [Cosinus kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Własności funkcji cosinus”.