

Kula i sfera

Pojęcie kuli i sfery. Promień kuli. Odcinki w kuli. Przykłady. Kula jako bryła obrotowa. Prezentacja multimedialna - obrót półokręgu wokół osi obrotu. Film - bańka mydlana jako przykład sfery.

Przykłady na przekroje kuli. Pole powierzchni kuli. Przykłady zadań na obliczanie pola powierzchni przekroi kuli.

Wzór na objętość kuli. Przykłady i ćwiczenia na obliczenie objętości kuli. Prezentacja multimedialna - wyprowadzenie wzoru na objętość kuli. Animacja - doświadczenie polegające na wypełnieniu kuli piaskiem z 4 stożków.

Zadania na obliczanie pola powierzchni kuli, objętości kuli i długości odcinków w kuli. Zadania, w tym zadania interaktywne. Stopniowanie trudności.

Zadania na pole powierzchni kuli, objętość kuli, przekroje i odcinki w kuli. Zadania o średnim stopniu trudności, w tym zadania interaktywne.

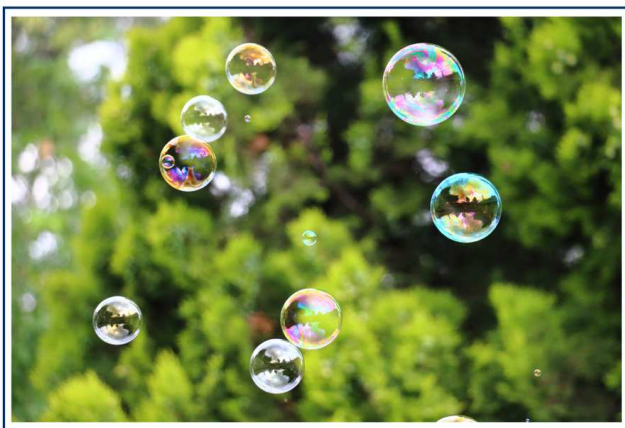
Praktyczne przykłady wykorzystywania pola powierzchni kuli. Informacja o związku Archimedesza z polem powierzchni kuli. Prezentacja interaktywna: wyprowadzenie wzoru na pole powierzchni kuli. Animacja: obliczenie połowy pola powierzchni piłki .

Kula i sfera

W tym materiale poznamy własności kuli oraz sfery i wykorzystamy je w zadaniach, również z kontekstem realistycznym. Będziemy obliczać objętość kuli, pole powierzchni kuli, pola jej przekrojów.

Elementy kuli

Krople rosy, bryłki gradu, ziarenka maku swoim kształtem przypominają kule.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

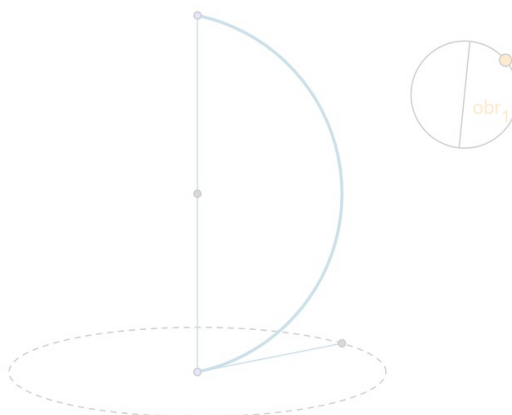
Jaka bryła powstanie w wyniku obrotu półkola wokół prostej, na której leży średnica tego półkola?

Sfera i kula

← etap 1 z 2 →

Utwórzmy w płaszczyźnie pionowej, zawierającej oś obrotu, półokrąg. Jaką figurę wykreśli w przestrzeni ten półokrąg obracając się wokół osi obrotu?

▶ || ↺



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Ptnd0cHpU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kulę można otrzymać w wyniku obrotu koła (lub półkoła) wokół prostej, w której zawiera się jego średnica.

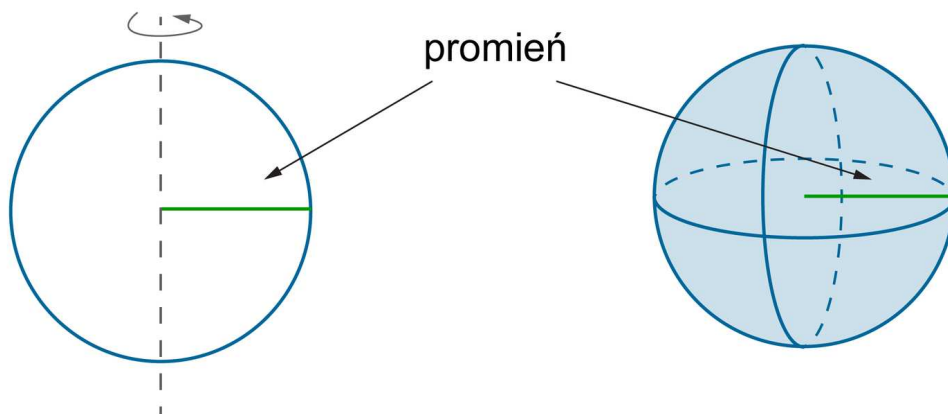
Ważne!

Promień tego koła to promień kuli, a środek koła – środek kuli.

Kulę w przestrzeni definiujemy podobnie jak koło na płaszczyźnie.

Definicja: Kula

Kula to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest nie większa od długości odcinka, zwanego promieniem kuli.

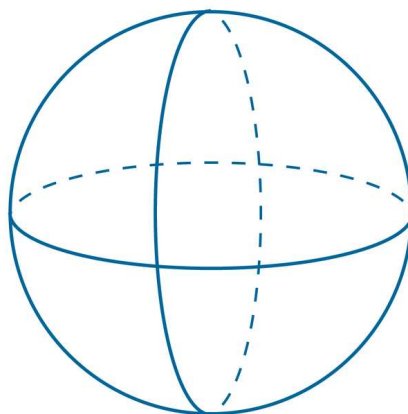


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W przestrzeni odpowiednikiem okręgu jest sfera.

Definicja: Sfera

Sfera to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest równa długości odcinka, zwanego promieniem sfery.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1NsBqNfpWI7u>

Kula_4117

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia bańki mydlane, które są sferami.

Przykład 3



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R18vvkNCTfOVh>

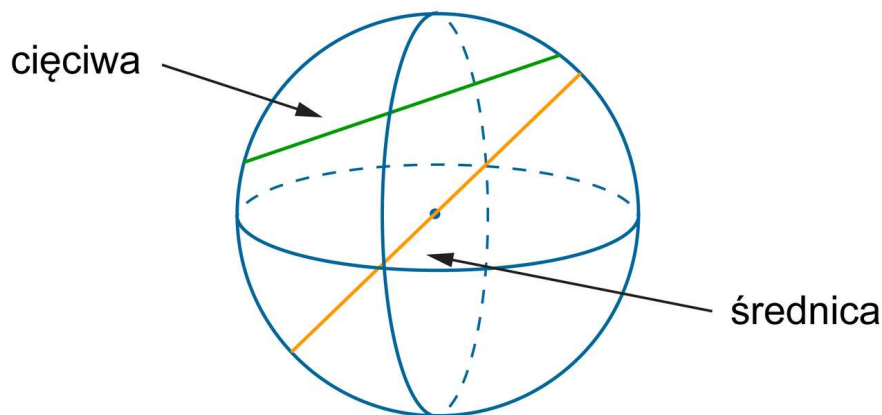
Kula_4118

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia stół bilardowy oraz umieszczone na nim bile, które są w kształcie kul.

Definicja: Cięciwa sfery (kuli)

Cięciwa sfery (kuli) to odcinek o końcach leżących na sferze. Cięciwa przechodząca przez środek sfery (kuli), to średnica.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Promień kuli jest równy 8,5 dm. Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub słowa, lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

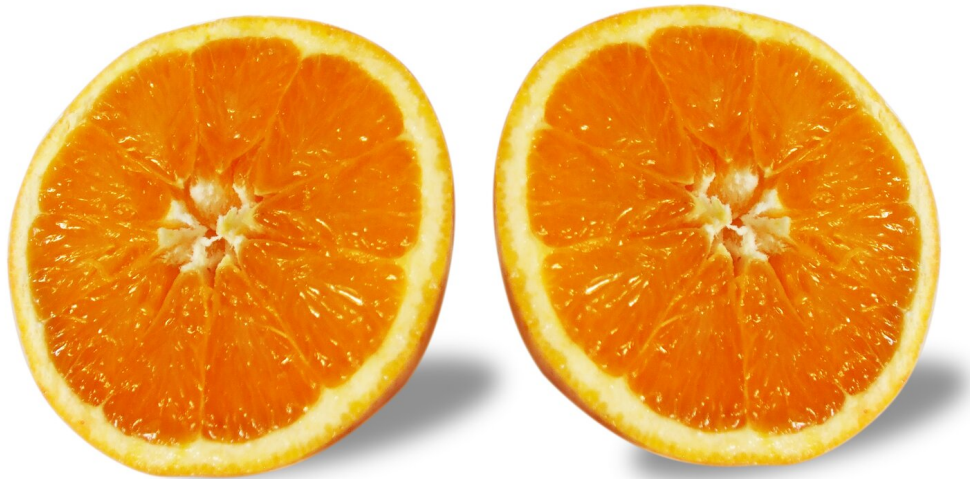
- Długość średnicy kuli wynosi dm.
- Największa odległość dwóch punktów leżących na sferze tej kuli wynosi dm.
- Czy cięciwa tej kuli może mieć długość 16 cm, 17 cm?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekroje kuli

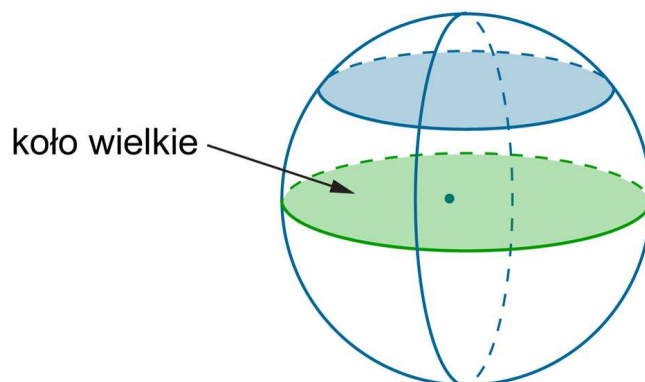
Przykład 4

Przetnij pomarańczę na dwie części. Jakie kształty mają tak otrzymane przekroje?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekrojem kuli jest koło (lub punkt). Jeśli płaszczyzna przecinająca kulę przechodzi przez jej środek, to otrzymany przekrój nazywamy kołem wielkim kuli. Płaszczyzna ta dzieli kulę na dwie półkule.

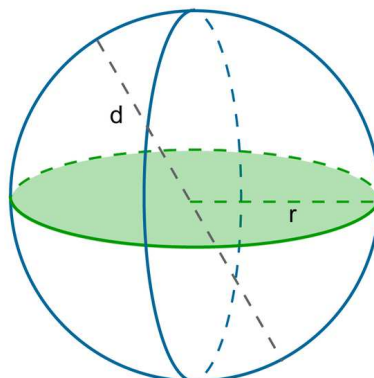


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Pole koła wielkiego kuli jest równe $0,16\pi \text{ mm}^2$. Obliczmy średnicę tej kuli.

Obliczamy promień r koła wielkiego kuli.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$\pi r^2 = 0,16\pi,$$

$$r^2 = 0,16,$$

$$r = \sqrt{0,16},$$

$$r = 0,4 \text{ mm},$$

bo

$$r > 0.$$

Średnica d kuli jest równa średnicy koła wielkiego.

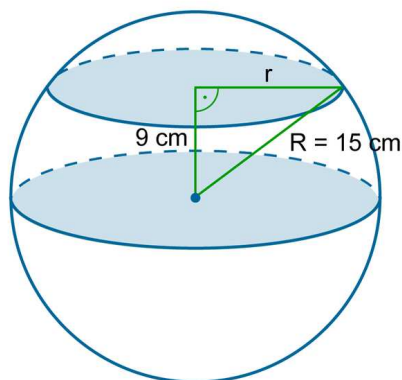
$$d = 2 \cdot 0,4,$$

$$d = 0,8 \text{ mm}.$$

Średnica kuli jest równa 0,8 mm.

Przykład 6

Promień kuli jest równy 15 cm. W odległości 9 cm od płaszczyzny koła wielkiego tej kuli poprowadzono przekrój. Oblicz obwód tego przekroju.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby obliczyć obwód przekroju, obliczymy najpierw jego promień r .

Zauważmy, że trójkąt utworzony przez promień kuli, promień przekroju i odcinek łączący przekroje kuli i prostopadły do nich, jest prostokątny.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$r^2 + 9^2 = 15^2,$$

$$r^2 = 225 - 81,$$

$$r = \sqrt{144},$$

$$r = 12 \text{ cm.}$$

Obliczamy teraz obwód przekroju.

$$2\pi r = 2\pi \cdot 12 = 24\pi.$$

Obwód przekroju jest równy 24π cm.

Pole powierzchni kuli

Przykład 7

Obierz pomarańczę. Czy możesz tak otrzymane skórki rozłożyć płasko na stole?

Nie, nie możesz. Pomarańcza ma kształt zbliżony do kuli, zatem nie jest możliwe, aby skórki pomarańczy rozłożyć płasko na stole bez ich deformacji.

Ciekawostka

Archimedes (ok. 287 – 212 p.n.e.) był greckim filozofem, przyrodnikiem i matematykiem. Odkrył prawo wyporu, zwane dzisiaj prawem Archimedesesa. Wynałazł między innymi organy wodne, wielokrążek, przenośnik śrubowy (urządzenie do przemieszczania materiałów sypkich lub cieczy).

Wyprowadził wzór na obliczenie pola powierzchni kuli, wykorzystując nowatorskie pomysły, które obecnie wchodzą w zakres rachunku różniczkowego i całkowego. Archimedes wykazał, że pole powierzchni kuli jest czterokrotnie większe od pola jej koła wielkiego.

Ważne!

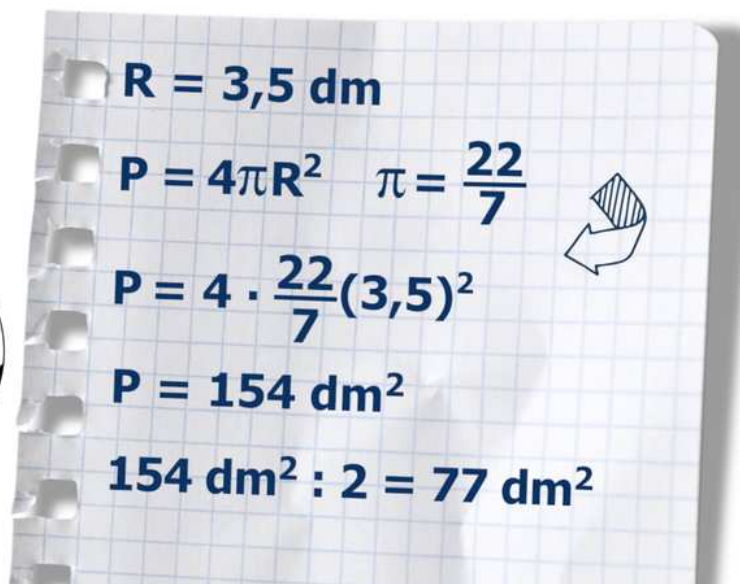
Pole P powierzchni kuli o promieniu R jest równe:

$$P = 4\pi R^2.$$

Przykład 8



Pole części pomalowanej na czarno stanowi połowę powierzchni piłki.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1D4ROsvgrqek>

Kula_4116

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia rozwiązanie pewnego zadania, w którym wykorzystywany jest wzór na pole powierzchni całkowitej kuli.

Przykład 9

Na toczek w kształcie półkuli zużyto 450 cm^2 filcu. Jaki obwód ma głowa osoby, dla której go wykonano?

Obliczmy promień R półkuli, w kształcie której jest toczek.

$$2\pi R^2 = 450,$$

$$\pi R^2 = 225,$$

$$R = \sqrt{\frac{225}{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}.$$

Obliczamy obwód głowy osoby, dla której wykonano toczek.

$$2\pi R = 2\pi \cdot \frac{15}{\sqrt{\pi}} = 30\sqrt{\pi} \approx 30\sqrt{3,14} \approx 53.$$

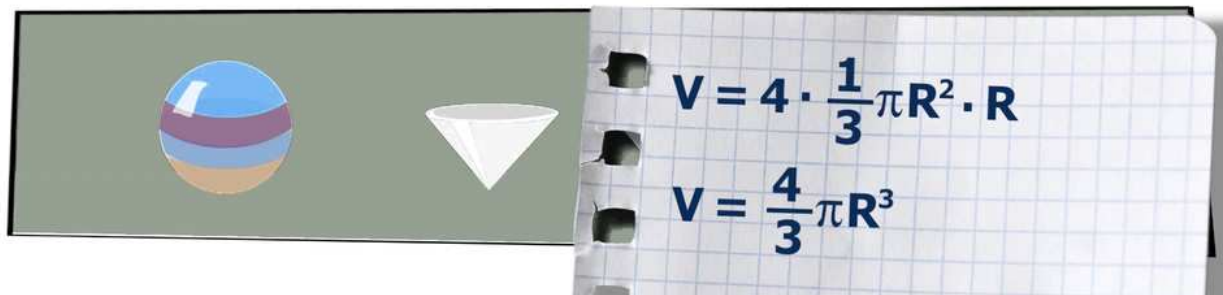
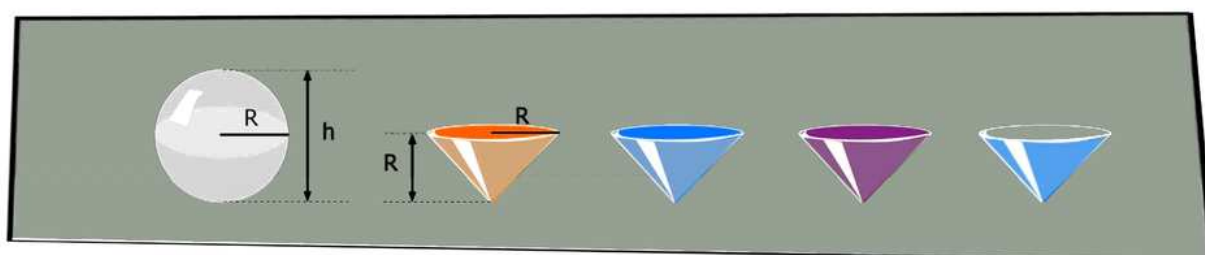
Obwód głowy osoby, dla której wykonano toczek, jest równy około 53 cm.

Objętość kuli

Przykład 10



Objętość pojemnika w kształcie kuli jest czterokrotnie większa od objętości pojemnika w kształcie stożka.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RqpxX1xQgvHAV>

Kula_4115

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia i uzasadnia wzór na objętość kuli o promieniu R .

Ważne!

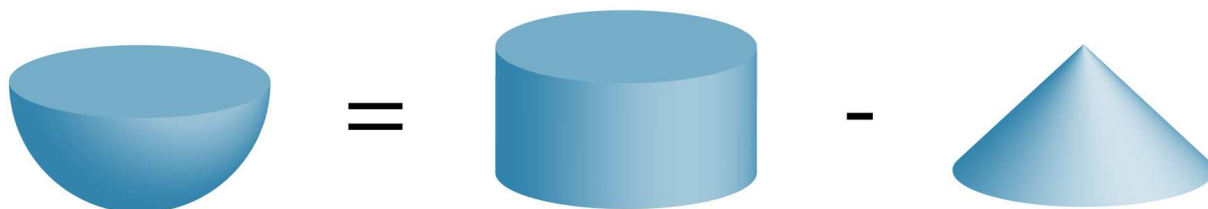
Objętość V kuli o promieniu R jest równa:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

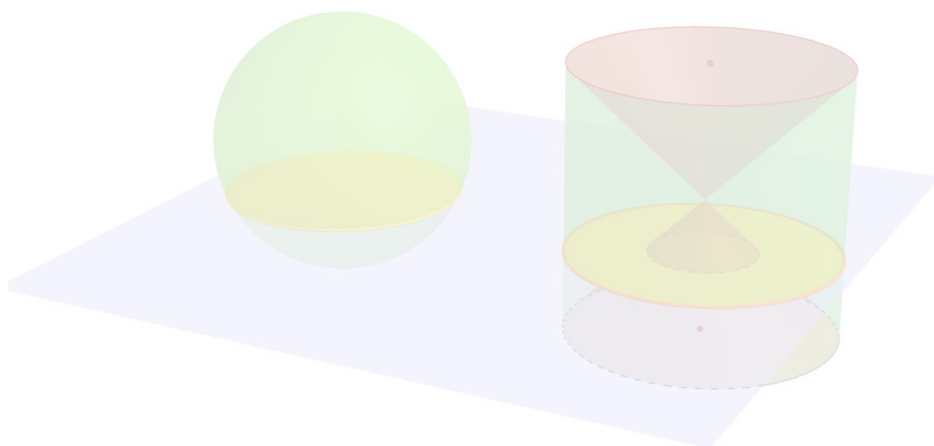
Ciekawostka

Objętość kuli można obliczyć zgodnie z zasadą siedemnastowiecznego matematyka włoskiego Bonaventury Cavalieriego.

Na podstawie rozważań Cavalieriego można wywnioskować, że objętość półkuli o promieniu R jest równa różnicy objętości walca o promieniu podstawy R oraz wysokości R i objętości stożka o promieniu podstawy R i wysokości R .

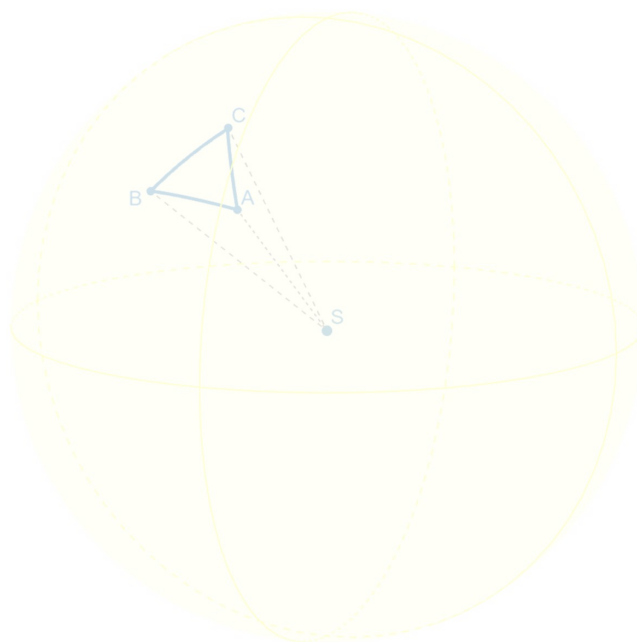


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Ptnd0cHpU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Ptnd0cHpU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 11

Kula z ciasta ma promień 1,2 dm. Ile ciasteczek w kształcie kulek o promieniu 2 cm każde można otrzymać z tego ciasta?

Obliczamy najpierw objętość dużej kuli ciasta.

$$1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1728,$$

$$V = 2304\pi \text{ cm}^3.$$

Teraz obliczamy objętość ciasteczka.

$$V_C = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3,$$

$$V_C = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Obliczamy, ile ciasteczek można otrzymać z dużej kuli ciasta.

$$2304 : \frac{32}{3} = 2304 \cdot \frac{3}{32} = 216.$$

Z ciasta można otrzymać 216 ciasteczek.

Przykład 12

Objętość kuli jest równa 288π . Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Obliczamy najpierw promień R kuli.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \quad \Bigg| : \frac{4}{3}\pi,$$

$$R^3 = 216,$$

$$R = \sqrt[3]{216} = 6.$$

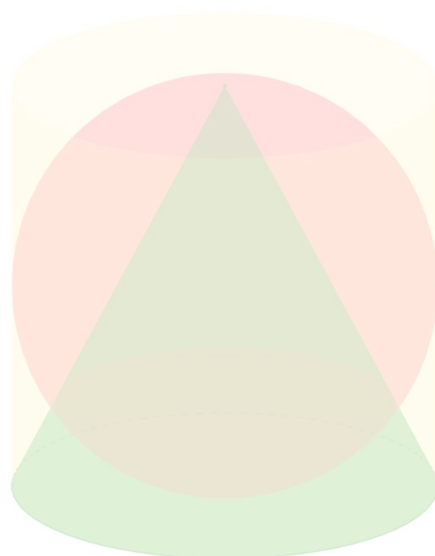
Możemy już obliczyć pole powierzchni kuli.

$$P = 4\pi R^2,$$

$$P = 4\pi \cdot 6^2,$$

$$P = 144\pi.$$

Pole powierzchni kuli jest równe 144π .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Ptnd0cHpU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Uzupełnij poniższe zdania, wpisując w luki odpowiednie liczby.

- Pole powierzchni kuli o promieniu 6 jest równe π .
- Pole powierzchni kuli o średnicy 10 jest równe π .
- Pole powierzchni kuli o promieniu 0,5 jest równe π .
- Pole powierzchni kuli o średnicy $\sqrt{2}$ jest równe π .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Promień kuli jest równy $1\frac{1}{4}$. Oblicz odpowiednie wielkości, a następnie połącz w pary elementy tak, aby powstały zdania prawdziwe.

Pole koła wielkiego tej kuli jest równe

$$\frac{25}{16} \pi$$

Pole powierzchni kuli jest równe

$$\frac{25}{4} \pi$$

Objętość kuli jest równa

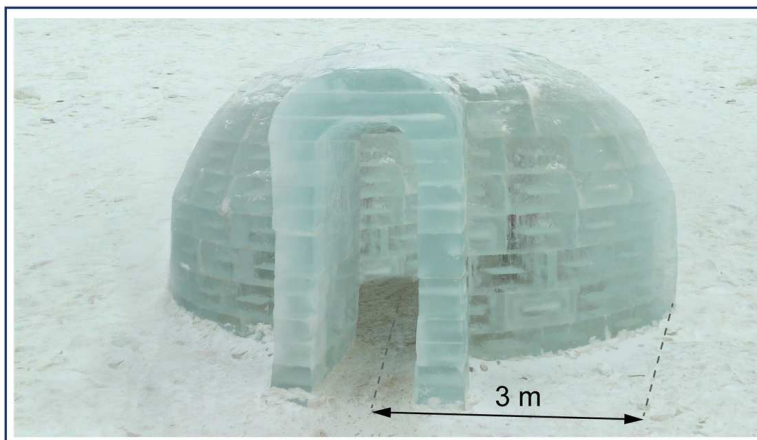
$$\frac{125}{48} \pi$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Igloo ma kształt półkuli, której promień zewnętrzny jest równy 3 m.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile wynosi pole powierzchni zewnętrznej tego igloo? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $144\pi \text{ m}^2$

☐ $27\pi \text{ m}^2$

☐ $18\pi \text{ m}^2$

☐ $36\pi \text{ m}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Objętość jednej piłeczki do tenisa ziemnego wynosi $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$. Ile wynosi średnica tej piłeczki? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 20 mm

☐ 80 mm

☐ 60 mm

☐ 40 mm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Pole powierzchni nadmuchanego balona jest równe 9856 cm^2 . Ile m^3 powietrza mieści się w tym balonie? Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$. Wynik podaj z dokładnością do 0,001 m^3 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Do pustego akwarium w kształcie półkuli wlano 4 l wody. Akwarium wypełnione jest teraz w 80% wodą. Ile dm^2 szkła użyto na jego wykonanie? Przyjmij $\pi = 3,125$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $P \approx 8,25 \text{ dm}^2$

☐ $P \approx 14,6 \text{ dm}^2$

☐ $P \approx 16,3 \text{ dm}^2$

☐ $P \approx 11,2 \text{ dm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Połącz przyczynę z odpowiednim skutkiem, korzystając ze wzoru na objętość kuli.

promień zmniejszono dwukrotnie

objętość zmniejszy się 27-krotnie

promień zwiększono pięciokrotnie

objętość zwiększy się 8-krotnie

promień zmniejszono trzykrotnie

objętość zmniejszy się 8-krotnie

promień zwiększono dwukrotnie

objętość zwiększy się 125-krotnie

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Oblicz pole powierzchni i objętość kuli w podanych przypadkach. Uzupełnij poniższe zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Średnica kuli jest równa 10 cm. Wtedy pole powierzchni kuli wynosi $\pi \text{ cm}^2$, a jej objętość wynosi $\pi \text{ cm}^3$.
- Pole koła wielkiego jest równe $81\pi \text{ dm}^2$. Wtedy pole powierzchni kuli wynosi $\pi \text{ dm}^2$, a objętość wynosi $\pi \text{ dm}^3$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Śweczkę w kształcie walca o średnicy podstawy równej 6 cm oraz wysokości 18 cm przetopiono na świeczkę w kształcie kuli. Oblicz promień tej kuli. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $R = \sqrt[3]{121,5} \approx 4,90 \text{ cm}$

☐ $R = \sqrt[3]{121,5} \approx 5,00 \text{ cm}$

☐ $R = \sqrt[3]{121,5} \approx 4,95 \text{ cm}$

☐ $R = \sqrt[3]{125,5} \approx 5,05 \text{ cm}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Promień kuli jest równy 15 cm. W jakiej odległości od płaszczyzny koła wielkiego tej kuli poprowadzono jej przekrój, jeśli obwód tego przekroju wynosi 24π ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 12 cm

☐ 6 cm

☐ 3 cm

☐ 9 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Pole powierzchni całkowitej półkuli wynosi 60π . Oblicz objętość i pole powierzchni całej kuli. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Objętość jest równa $\frac{170\sqrt{5}}{3}\pi$, pole wynosi 90π

☐ Objętość jest równa $\frac{140\sqrt{5}}{3}\pi$, pole wynosi 60π

☐ Objętość jest równa $\frac{150\sqrt{5}}{3}\pi$, pole wynosi 70π

☐ Objętość jest równa $\frac{160\sqrt{5}}{3}\pi$, pole wynosi 80π

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Kulę o średnicy 10 cm przecięto na dwie jednakowe części. Jakie pole powierzchni ma każda z otrzymanych półkuli? Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole powierzchni otrzymanych półkul wynosi $\pi \text{ cm}^2$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Z kuli o promieniu 5 cm odcięto część w odległości 3 cm od środka kuli. Oblicz stosunek pola powierzchni otrzymanego przekroju do pola koła wielkiego. Uzupełnij poniższe zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Stosunek tych pól wynosi .

☐ $\frac{14}{20}$

☐ $\frac{16}{25}$

☐ $\frac{14}{25}$

☐ $\frac{16}{20}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Przekrój osiowy kuli ma pole powierzchni równe 16π . Oblicz pole P powierzchni i objętość V tej kuli. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $P = 62\pi, V = \frac{253}{3}\pi$

☐ $P = 66\pi, V = \frac{263}{3}\pi$

☐ $P = 60\pi, V = \frac{265}{3}\pi$

☐ $P = 64\pi, V = \frac{256}{3}\pi$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Obwód koła wielkiego kuli jest równy 16π . Jakie pole powierzchni ma ta kula? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $32\sqrt{3}\pi$

☐ 256π

☐ $8\sqrt{3}\pi$

☐ $24\sqrt{3}\pi$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Koło o obwodzie 20π obraca się wokół swojej średnicy. Jakie pole ma koło wielkie otrzymanej kuli? Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

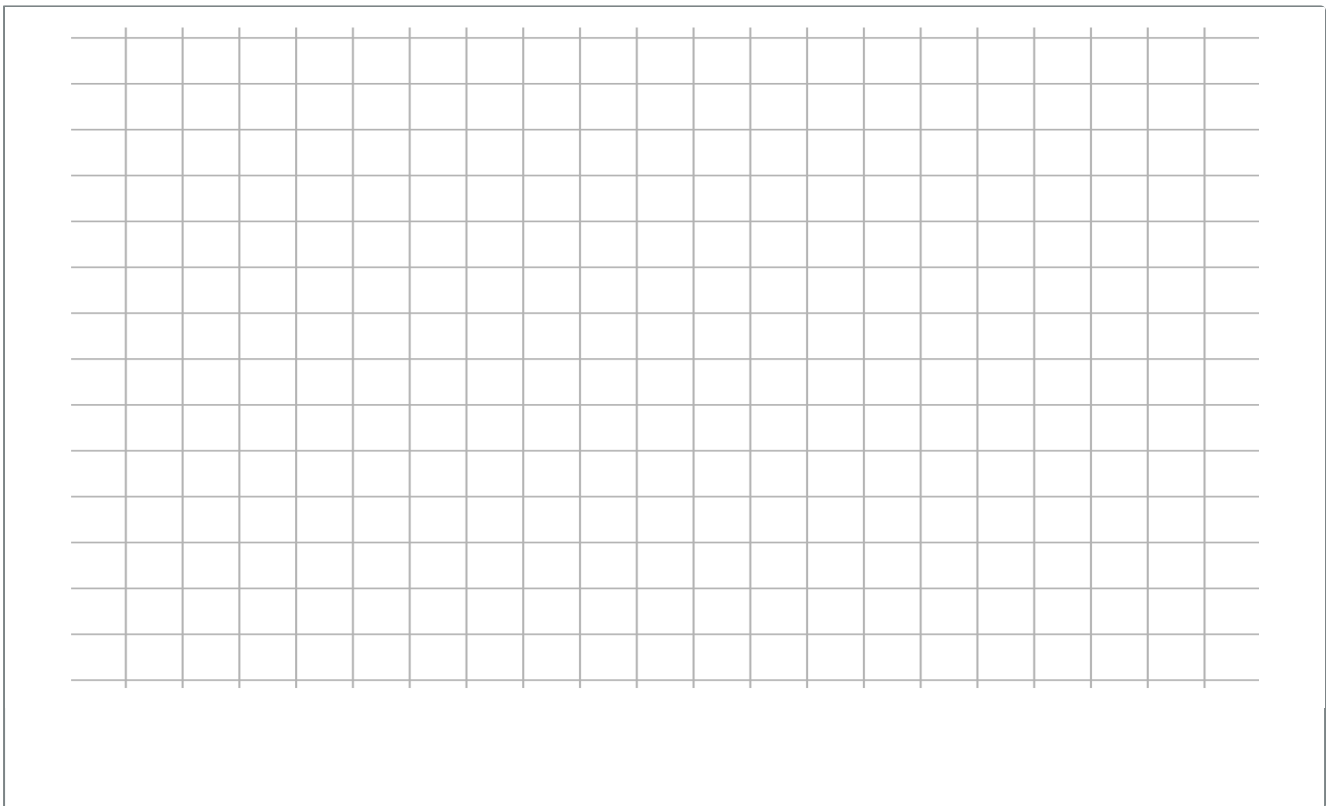
Koło ma pole π .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Jaką figurę otrzymamy, obracając okrąg wokół jego średnicy?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Do pojemnika w kształcie sześcianu o krawędzi 10 cm włożono kulę o średnicy 6 cm. Jaką część pojemności sześcianu zajmuje kula? Uzupełnij poniższe zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Kula zajmuje pojemności sześcianu.

$$\frac{11340}{100000}$$

$$\frac{11304}{100000}$$

$$\frac{11430}{1000}$$

$$\frac{11304}{10000}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Do menzurki w kształcie walca o średnicy podstawy równej 12 mm wrzucono metalową kulkę o promieniu 2 mm. Ile wody należy wlać do tej menzurki, aby kulka była zakryta? Przyjmij $\pi = 3,15$. Uzupełnij poniższe zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Do menzurki należy wlać mm³ wody.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Niech V_K będzie objętością kuli o promieniu R , a V_S objętością stożka o promieniu podstawy R oraz wysokości też R . Oblicz stosunek $V_K : V_S$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{V_k}{V_s} = 6$

☐ $\frac{V_k}{V_s} = 8$

☐ $\frac{V_k}{V_s} = 2$

☐ $\frac{V_k}{V_s} = 4$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Kula i stożek mają jednakowe objętości. Kula ma promień długości 6 cm. Promień podstawy stożka ma długość 8 cm. Oblicz wysokość stożka. Uzupełnij poniższe zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wysokość stożka wynosi cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Przekrój kuli może być punktem.	☐	☐
Każdy przekrój kuli jest okręgiem.	☐	☐
Objętość kuli jest proporcjonalna do sześcianu promienia kuli.	☐	☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.