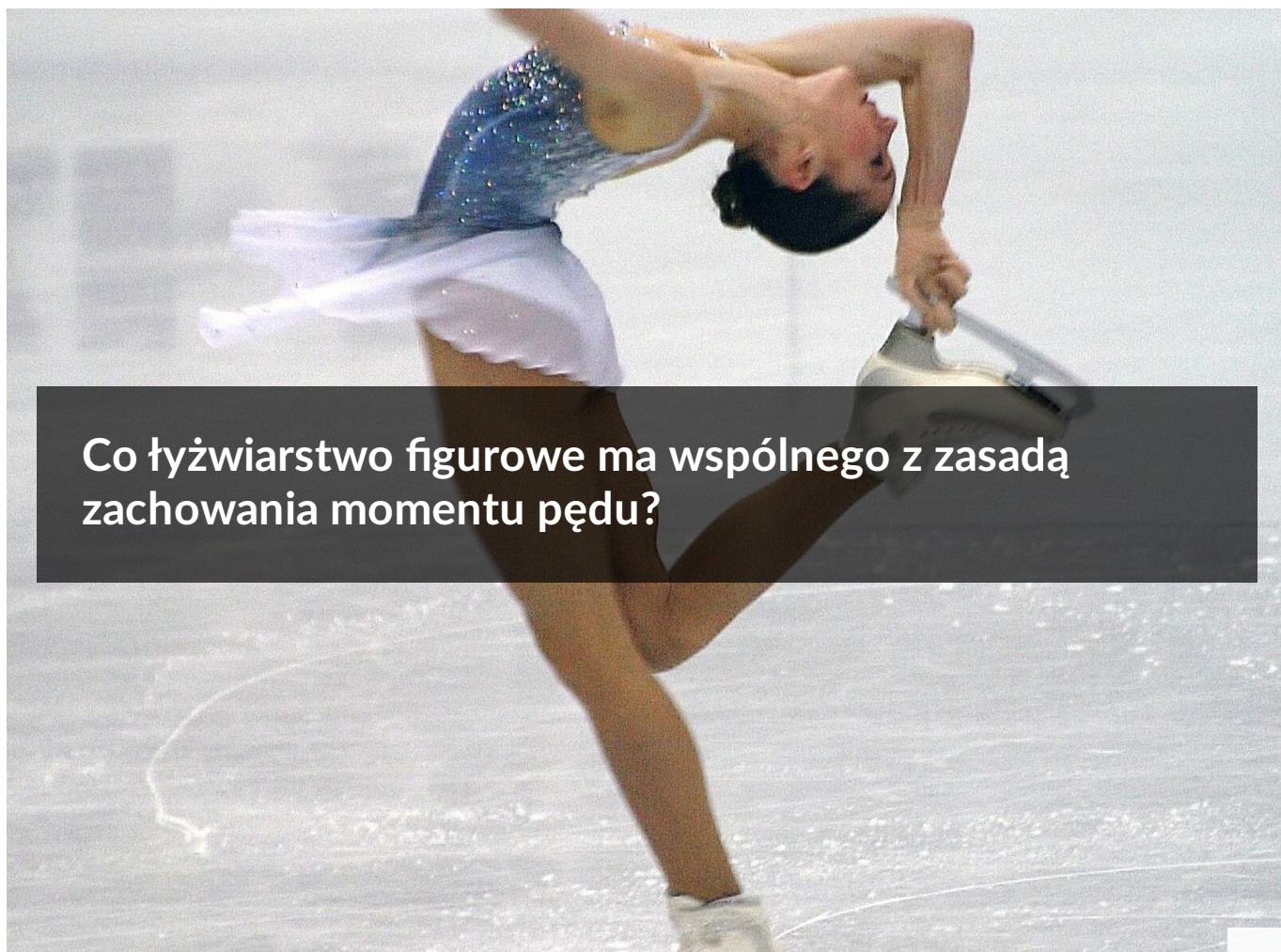




Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)

- Dla nauczyciela



Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?

## Czy to nie ciekawe?

Zdarzyło Ci się obserwować łyżwiarzy wykonujących ewolucje na lodzie lub baletnice wykonujące szybkie obroty? Zwróciło Twoją uwagę, jak zmienia się szybkość obracania się tej osoby, gdy zbliża i oddala od siebie ramiona? Do wyjaśnienia tego zjawiska zastosować trzeba **zasadę zachowania momentu pędu**.



Rys. a. Łyżwiarka w trakcie wykonywania figury zwanej axel. [Źródło: Luu / CC BY-SA]

## Twoje cele

W tym materiale:

- dowiesz się, w jakich codziennych sytuacjach można zaobserwować zasadę zachowania momentu pędu,
- zrozumiesz zachowanie się łyżwiarzy na lodzie,
- dowiesz się, jak przeprowadzać obliczenia wykorzystujące zasadę zachowania momentu pędu,
- zastosujesz zasadę zachowania momentu pędu do rozwiązywania zadań.

# Przeczytaj

---

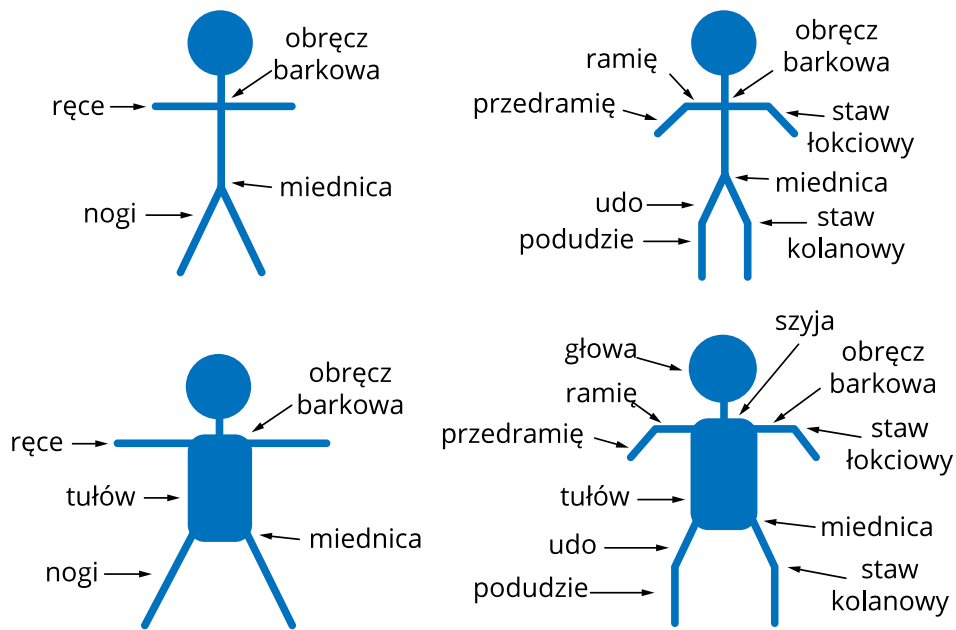
## Warto przeczytać

Moment pędu bryły sztywnej definiujemy jako  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , gdzie  $I$  to moment bezwładności tej bryły, a  $\omega$  to prędkość obrotowa tego ciała. Co ta definicja ma wspólnego z tańcem na lodzie?

Zwróćmy uwagę, że w trakcie wykonywania wielu figur tanecznych ciało tancerzy porusza się ruchem obrotowym. Przyjmijmy na wstępie dla uproszczenia, że mówimy o tańcu solo, a nie w parze. Pomyślmy teraz o tej osobie jako o... bryle sztywnej. Oczywiście może nasunąć się tu refleksja, że definiując bryłę sztywną mówiliśmy, że to „ciało, którego elementy nie mogą się względem siebie przemieszczać”. Elementy ciała człowieka ewidentnie mogą się względem siebie przemieszczać – możemy trzymać ręce wzdłuż tułowia albo unieść je do góry i tak dalej. To prawda, dlatego będziemy patrzeć na człowieka jak na układ składający się z kilku brył sztywnych. Taki układ będzie miał całkowity moment bezwładności będący sumą momentów bezwładności wszystkich jego elementów. W danym momencie (przy danym ustawieniu ciała) będzie on miał określoną, stałą wartość.

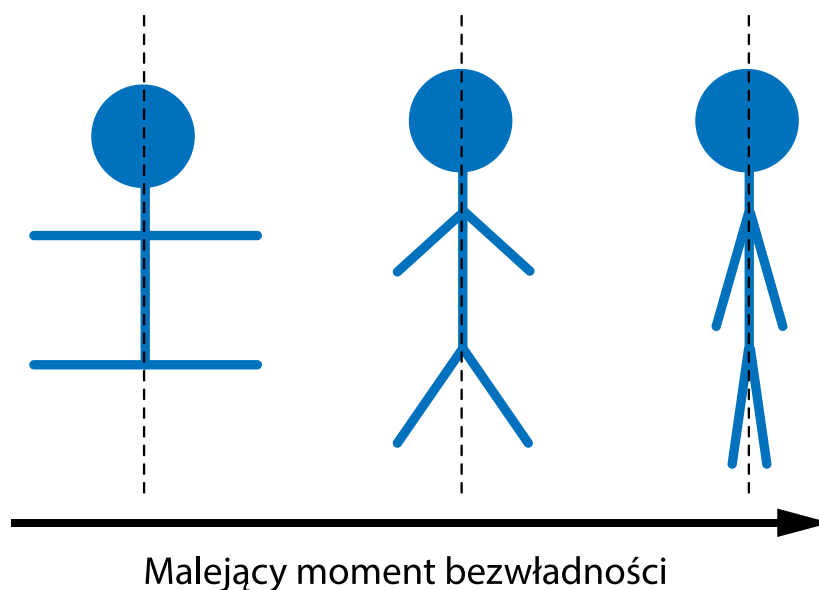
Na jakie mniejsze bryły sztywne podzielimy ciało człowieka?

To zależy od tego, jak dokładnego opisu potrzebujemy – Rys. 1. przedstawia przykładowe „modele” ciała człowieka jako układu brył sztywnych. Modele te różnią się od siebie stopniem złożoności – liczbą brył oraz liczbą miejsc, w których bryły te się łączą. Gdybyśmy chcieli zbudować bardzo dokładny model, musielibyśmy opisać każdy staw – jednakże tak złożony model stałby się bezużyteczny w praktyce. Czy jednak małe stawy w palcach u dłoni mają znaczący wpływ na całkowity moment bezwładności ciała? Nie! Dlatego możemy uprościć nasz model tylko do najistotniejszych elementów. Do wyjaśnienia jakościowo, dlaczego rozłożenie ramion przez tancerza zmniejsza jego prędkość kątową wystarczy nam najprostszy model, z lewej górnej części Rys. 1.



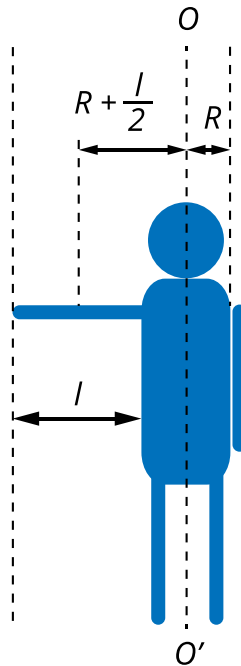
Rys. 1. Różny stopień złożoności modelu fizycznego przedstawiającego człowieka jako układ brył sztywnych. Oś obrotu ciała przechodzi przez szyję i głowę, której położenie w modelach 1, 2, 3 się nie zmienia - dopiero w modelu 4 pojawia się szyja, sugerując, że i głowa może się poruszać. Analogicznie dopiero w trzecim modelu wzięto pod uwagę tułów jako bryłę sztywną o określonym rozmiarze, a nie wyłącznie bezwymiarowy (ale masywny) korpus.

Co się dzieje z całkowitym momentem bezwładności naszego ciała, jeśli rozkładamy ręce i nogi na boki? Przyjmijmy, że chcemy obrócić się dookoła osi pionowej, jak na Rys. 2. Zbliżenie rąk i nóg do osi obrotu powoduje zmniejszenie momentu bezwładności naszego ciała.



Rys. 2. Zmiany momentu bezwładności względem osi pionowej w zależności od ustawienia rąk i nóg.

Zastanów się, w jakiej odległości od osi obrotu znajduje się środek masy ręki. Oczywiście, gdy jest ona opuszczona wzdłuż ciała, jest on bliżej tej osi obrotu, niż gdy rozkładamy rękę na bok! Aby wykazać to ilościowo spójrzmy na nieco dokładniejszy model, widoczny na Rys. 3. Uznajemy, że średnica ręki jest pomijalnie mała w porównaniu do rozmiaru całego ciała – i traktujemy rękę jako pręt (a nie walce). Jaki będzie moment bezwładności każdej z rąk względem osi pionowej  $OO'$ , przechodzącej przez środek człowieka przedstawionego modelowo na Rys. 3.?



Rys. 3. Ręka ustawiona poziomo ma większy moment bezwładności niż w pozycji pionowej.

Moment bezwładności każdej z rąk zgodnie z twierdzeniem Steinera wynosi:

$$I_{\text{poziom}} = \frac{1}{12}m_r l^2 + m_r \left(R + \frac{l}{2}\right)^2 = m_r \left(\frac{1}{12}l^2 + R^2 + Rl + \frac{l^2}{4}\right) = m_r \left(\frac{1}{3}l^2 + R^2 + Rl\right)$$

$$I_{\text{pion}} = m_r R^2$$

gdzie, zgodnie z Rys. 3.,  $l$  oznacza długość ręki, a  $R$  promień tułowia.

Jakie ma to znaczenie dla prędkości obracania się? Wystarczy, że wrócimy do zasady zachowania momentu pędu bryły sztywnej:

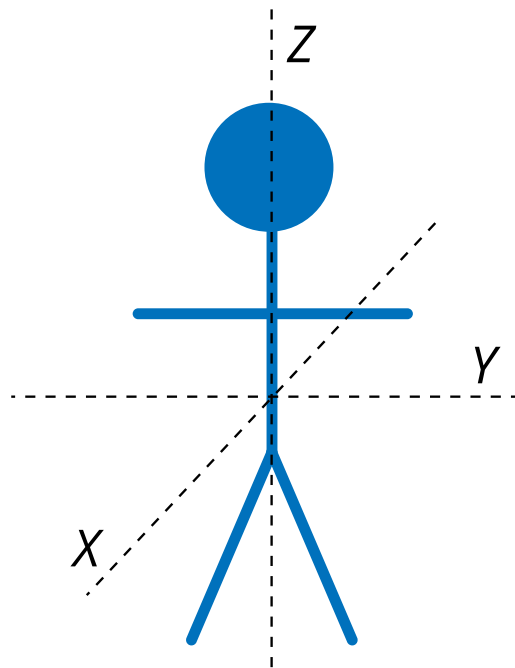
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

Znaczy to, że:

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

Przy innym ułożeniu – np. rozłożeniu rąk – całkowity moment bezwładności tego układu się zmieni – ale moment pędu musi pozostać stały. Skoro moment bezwładności się zwiększył – prędkość kątowna musi się zmniejszyć. Jeśli moment bezwładności się zmniejszy, prędkość kątowna wzrośnie. Czy teraz rozumiesz, dlaczego łyżwiarze przygotowując się do wykonania **piruetu** wykonują obszerny najazd, a po rozpoczęciu obracania się unoszą gwałtownie ręce ponad głowę?

Warto jeszcze dodać, że omawialiśmy obrót wokół osi pionowej. Jednakże w różnych sportach, w szczególności w akrobatyce, wiele figur polega na obrocie wokół innych osi. Rys. 4. przedstawia poglądowo te osie – jak nazywamy obroty wokół każdej z nich?

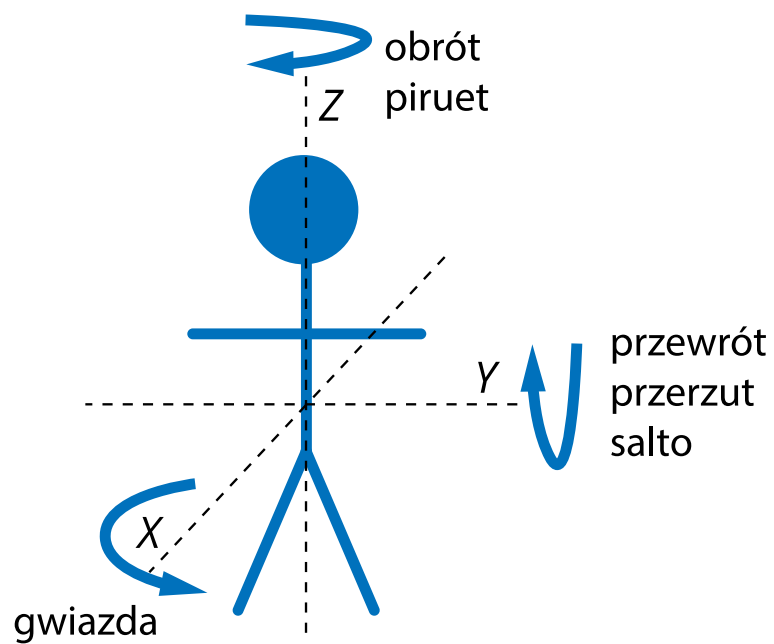


Rys. 4. Uproszczony model człowieka – wskazanie przykładowych osi obrotu.

Wprowadzenie ciała w ruch obrotowy dookoła poszczególnych osi nazywamy kolejno:

- Wokół osi X – gwiazda,
- Wokół osi Y – przewrót (potocznie: fikołek), przerzut (potocznie: fiflak), bez dotykania podłoża – salto,
- Wokół osi Z – obrót, **piruet**.

Figury te podsumowano na Rys. 5.



Rys. 5. Nazwy figur akrobatycznych wykonywanych wokół różnych osi obrotu.

## Słowniczek

### piruet

(z fran.: *pirouette*) obrót tancerza wokół własnej osi (pionowej).

# Symulacja interaktywna

---

## Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?

W symulacji mamy narysowaną ludzką postać. Możemy zmieniać jej masę, prędkość kątową i obserwować szybkość wirowania przy zmianie rozstawu ramion.

*Uwaga: Praca z symulacją jest wygodniejsza po przełączeniu na widok pełnoekranowy.*

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.




### Polecenie 1

### Polecenie 2

Jak wpływa na wartość momentu pędu: a) zmiana masy postaci, b) zmiana prędkości kątowej?

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



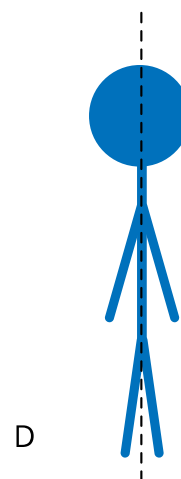
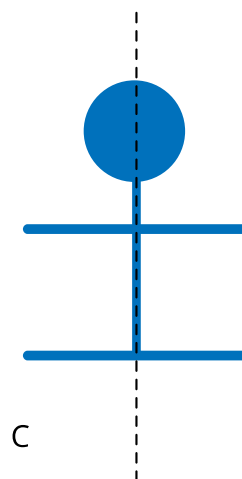
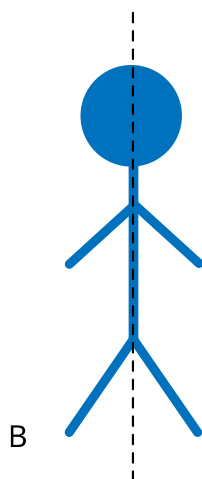
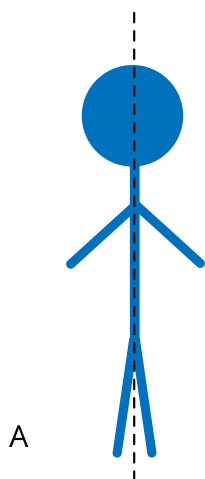
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



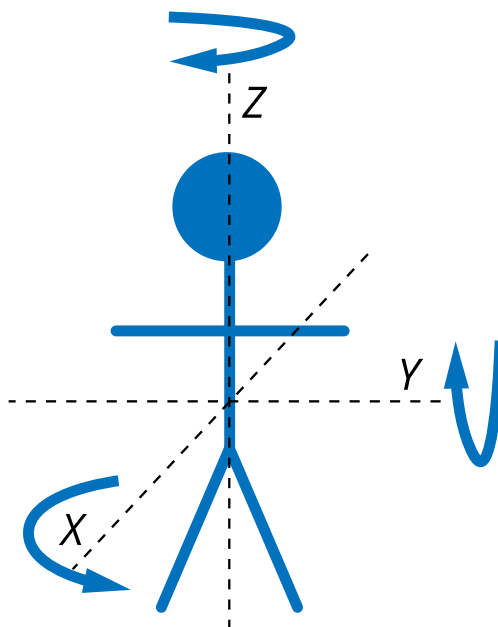
Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



Na poniższym rysunku schematycznego modelu człowieka zaznaczono różne osie obrotu. Przyporządkuj nazwy figur akrobatycznych do tego, wokół której osi się one odbywają:



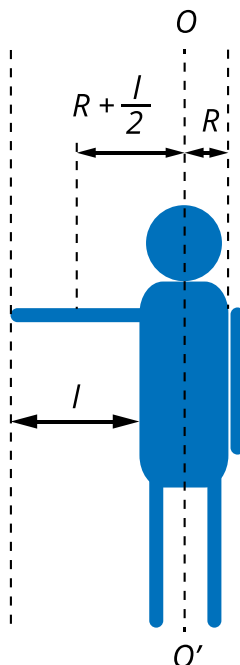
obrót, piruet, gwiazda, przewrót, przerzut, salto

X	
Y	
Z	

## Ćwiczenie 6

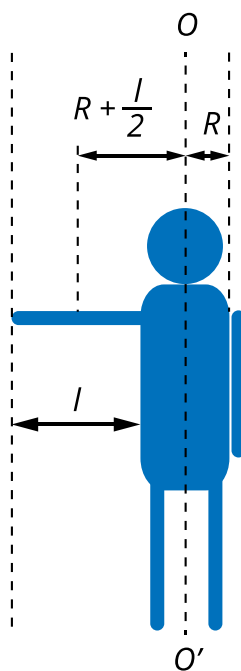


Wyprowadź wzór na zmianę prędkości obrotowej człowieka, który najpierw obracał się z rozłożonymi ramionami, a następnie trzymał je wzdłuż ciała, przyjmując oznaczenia jak na rysunku poniżej oraz: masa tułowia -  $m_t$ , masa ręki -  $m_r$ ).



## Ćwiczenie 7

Przyjrzyj się rysunkowi.



$$R = 15cm$$

$$l = 50cm$$

## Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

<b>Imię i nazwisko autora:</b>	Dariusz Aksamit
<b>Przedmiot:</b>	Fizyka
<b>Temat zajęć:</b>	<b>Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?</b>
<b>Grupa docelowa:</b>	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
<b>Podstawa programowa:</b>	<p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem;</p> <p>7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń:</p> <p>7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu.</p>
<b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b>	<p><b>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li><li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li><li>• kompetencje cyfrowe,</li><li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li></ul>

<b>Cele operacyjne:</b>	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. omawia, w jakich codziennych sytuacjach można zaobserwować zasadę zachowania momentu pędu;</li> <li>2. wyjaśnia zachowanie się łyżwiarzy na lodzie;</li> <li>3. przeprowadza obliczenia wykorzystujące zasadę zachowania momentu pędu.</li> </ol>
<b>Strategie i metody nauczania:</b>	strategia eksperymentalno-obszernacyjna
<b>Formy zajęć:</b>	praca indywidualna, pokaz
<b>Środki dydaktyczne:</b>	komputer z dostępem do Internetu, projektor multimedialny
<b>Materiały pomocnicze:</b>	brak
<b>PRZEBIEG LEKCJI</b>	
<b>Faza wprowadzająca:</b>	
<p>Nauczyciel pyta uczniów o to, czy ktoś uprawia łyżwiarstwo lub taniec. Nauczyciel prosi ochotnika o wykonanie pokazu – o wykonanie piruetu, czyli obrotu ciała wokół osi pionowej. Nauczyciel prosi uczniów o przyjrzenie się przede wszystkim ułożeniu rąk w trakcie wykonywania tej figury i zanotowanie, kiedy prędkość kątowa, z jaką obraca się osoba wykonująca obrót, wzrasta, a kiedy maleje. Nauczyciel prowadzi dyskusję na ten temat, prosząc uczniów o znalezienie analogii do tego doświadczenia również w innych sportach (np. akrobatyka, skoki do wody, taniec). Nauczyciel pyta uczniów o ich intuicyjne wytłumaczenie zaobserwowanego zjawiska.</p>	
<b>Faza realizacyjna:</b>	
<p>Nauczyciel zapisuje na tablicy zasadę zachowania pędu w postaci pokazującej, że iloczyn prędkości kątowej i momentu bezwładności jest wartością stałą: <math>I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2</math>. Nauczyciel przechodzi do prezentacji symulacji z niniejszego e-materiału, wprowadzając parametry zaproponowane przez uczniów (przykładowo masy tancerzy odpowiadające masie ciała człowieka w ich wieku). Po przeprowadzeniu serii symulacji nauczyciel prosi uczniów o zapisanie wniosków.</p>	
<b>Faza podsumowująca:</b>	
<p>Dla upewnienia się, że uczniowie zrozumieli omawiane zagadnienie, nauczyciel prosi ich o wykonanie zadań 1, 2, 3, 4 i 8 z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel indywidualnie sprawdza prace uczniów i na tej podstawie określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele. Na koniec nauczyciel zadaje pracę domową.</p>	
<b>Praca domowa:</b>	

Rozwiązanie zadań, których nie rozwiązano w trakcie lekcji, czyli zadania 5, 6 i 7 w celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości dotyczących zasady zachowania momentu pędu.

**Wskazówki  
metodyczne  
opisujące różne  
zastosowania danego  
multimedium:**

Symulacja może być wykorzystana zgodnie ze scenariuszem. Można również rozpocząć lekcję od wykonania symulacji, a następnie wykonać eksperyment, aby potwierdzić przewidywania teoretyczne.