Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się

- Dla nauczyciela

Czy to nie ciekawe?

Zdarzyło Ci się obserwować łyżwiarzy wykonujących ewolucje na lodzie lub baletnice wykonujące szybkie obroty? Zwróciło Twoją uwagę, jak zmienia się szybkość obracania się tej osoby, gdy zbliża i oddala od siebie ramiona? Do wyjaśnienia tego zjawiska zastosować trzeba **zasadę zachowania momentu pędu**.

Rys. a. Łyżwiarka w trakcie wykonywania figury zwanej axel. [Źródło: Luu / CC BY-SA]

Twoje cele

W tym materiale:

- dowiesz się, w jakich codziennych sytuacjach można zaobserwować zasadę zachowania momentu pędu,
- zrozumiesz zachowanie się łyżwiarzy na lodzie,
- dowiesz się, jak przeprowadzać obliczenia wykorzystujące zasadę zachowania momentu pędu,
- zastosujesz zasadę zachowania momentu pędu do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

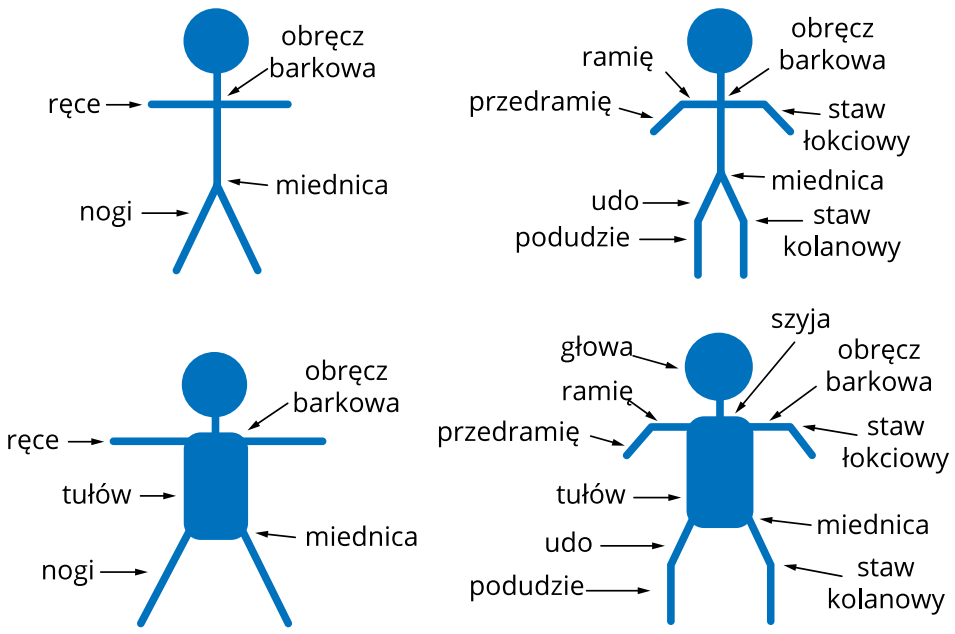
Warto przeczytać

Moment pędu bryły sztywnej definiujemy jako $\vec{L} = I\vec{\omega}$, gdzie I to moment bezwładności tej bryły, a ω to prędkość obrotowa tego ciała. Co ta definicja ma wspólnego z tańcem na lodzie?

Zwróćmy uwagę, że w trakcie wykonywania wielu figur tanecznych ciało tancerzy porusza się ruchem obrotowym. Przyjmijmy na wstępie dla uproszczenia, że mówimy o tańcu solo, a nie w parze. Pomyślmy teraz o tej osobie jako o… bryle sztywnej. Oczywiście może nasunąć się tu refleksja, że definiując bryłę sztywną mówiliśmy, że to „ciało, którego elementy nie mogą się względem siebie przemieszczać". Elementy ciała człowieka ewidentnie mogą się względem siebie przemieszczać – możemy trzymać ręce wzdłuż tułowia albo unieść je do góry i tak dalej. To prawda, dlatego będziemy patrzeć na człowieka jak na układ składający się z kilku brył sztywnych. Taki układ będzie miał całkowity moment bezwładności będący sumą momentów bezwładności wszystkich jego elementów. W danym momencie (przy danym ustawieniu ciała) będzie on miał określoną, stałą wartość.

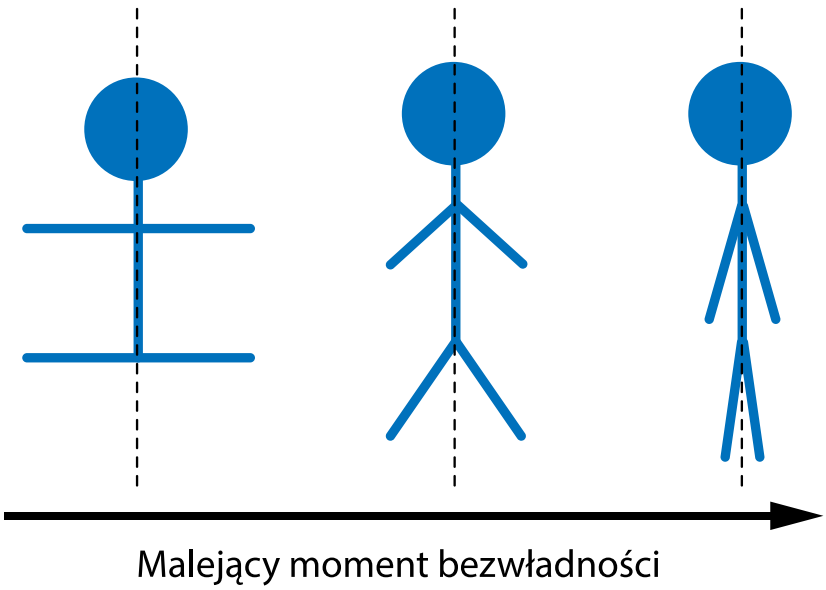
Na jakie mniejsze bryły sztywne podzielimy ciało człowieka?

To zależy od tego, jak dokładnego opisu potrzebujemy – Rys. 1. przedstawia przykładowe „modele" ciała człowieka jako układu brył sztywnych. Modele te różnią się od siebie stopniem złożoności – liczbą brył oraz liczbą miejsc, w których bryły te się łączą. Gdybyśmy chcieli zbudować bardzo dokładny model, musielibyśmy opisać każdy staw – jednakże tak złożony model stałby się bezużyteczny w praktyce. Czy jednak małe stawy w palcach u dłoni mają znaczący wpływ na całkowity moment bezwładności ciała? Nie! Dlatego możemy uprościć nasz model tylko do najistotniejszych elementów. Do wyjaśnienia jakościowo, dlaczego rozłożenie ramion przez tancerza zmniejsza jego prędkość kątową wystarczy nam najprostszy model, z lewej górnej części Rys. 1.



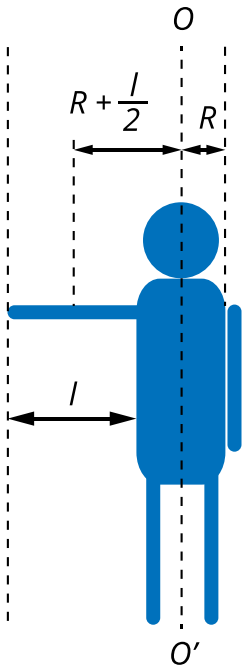
Rys. 1. Różny stopień złożoności modelu fizycznego przedstawiającego człowieka jako układ brył sztywnych. Oś obrotu ciała przechodzi przez szyję i głowę, której położenie w modelach 1, 2, 3 się nie zmienia - dopiero w modelu 4 pojawia się szyja, sugerując, że i głowa może się poruszać. Analogicznie dopiero w trzecim modelu wzięto pod uwagę tułów jako bryłę sztywną o określonym rozmiarze, a nie wyłącznie bezwymiarowy (ale masywny) korpus.

Co się dzieje z całkowitym momentem bezwładności naszego ciała, jeśli rozkładamy ręce i nogi na boki? Przyjmijmy, że chcemy obrócić się dookoła osi pionowej, jak na Rys. 2. Zbliżenie rąk i nóg do osi obrotu powoduje zmniejszenie momentu bezwładności naszego ciała.



Rys. 2. Zmiany momentu bezwładności względem osi pionowej w zależności od ustawienia rąk i nóg.

Zastanów się, w jakiej odległości od osi obrotu znajduje się środek masy ręki. Oczywiście, gdy jest ona opuszczona wzdłuż ciała, jest on bliżej tej osi obrotu, niż gdy rozkładamy ręce na bok! Aby wykazać to ilościowo spójrzmy na nieco dokładniejszy model, widoczny na Rys. 3. Uznajemy, że średnica ręki jest pomijalnie mała w porównaniu do rozmiaru całego ciała – i traktujemy ręce jako pręty (a nie walce). Jaki będzie moment bezwładności każdej z rąk względem osi pionowej OO', przechodzącej przez środek człowieka przedstawionego modelowo na Rys. 3.?



Rys. 3. Ręka ustawiona poziomo ma większy moment bezwładności niż w pozycji pionowej.

Moment bezwładności każdej z rąk zgodnie z twierdzeniem Steinera wynosi:

$$I_{\text{poziom}} = \frac{1}{12} m_r l^2 + m_r \left(R + \frac{l}{2}\right)^2 = m_r \left(\frac{1}{12} l^2 + R^2 + Rl + \frac{l^2}{4}\right) = m_r \left(\frac{1}{3} l^2 + R^2 + Rl\right)$$

$$I_{\text{pion}} = m_r R^2$$

gdzie, zgodnie z Rys. 3., l oznacza długość ręki, a R promień tułowia.

Jakie ma to znaczenie dla prędkości obracania się? Wystarczy, że wrócimy do zasady zachowania momentu pędu bryły sztywnej:

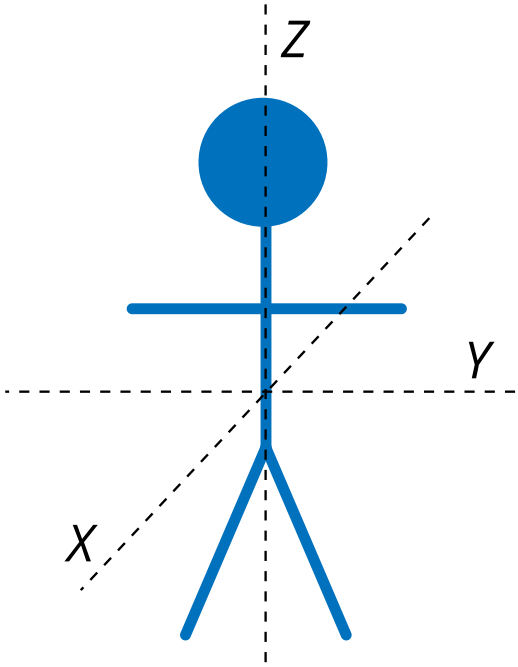
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const$$

Znaczy to, że:

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

Przy innym ułożeniu – np. rozłożeniu rąk – całkowity moment bezwładności tego układu się zmieni – ale moment pędu musi pozostać stały. Skoro moment bezwładności się zwiększył – prędkość kątowa musi się zmniejszyć. Jeśli moment bezwładności się zmniejszy, prędkość kątowa wzrośnie. Czy teraz rozumiesz, dlaczego łyżwiarze przygotowując się do wykonania piruetu wykonują obszerny najazd, a po rozpoczęciu obracania się unoszą gwałtownie ręce ponad głowę?

Warto jeszcze dodać, że omawialiśmy obrót wokół osi pionowej. Jednakże w różnych sportach, w szczególności w akrobatyce, wiele figur polega na obrocie wokół innych osi. Rys. 4. przedstawia poglądowo te osie – jak nazywamy obroty wokół każdej z nich?

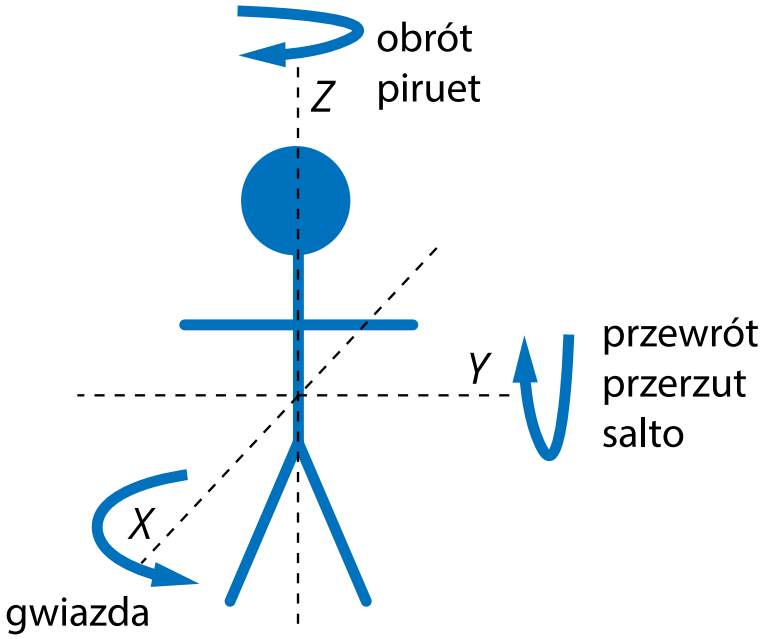


Rys. 4. Uproszczony model człowieka – wskazanie przykładowych osi obrotu.

Wprowadzenie ciała w ruch obrotowy dookoła poszczególnych osi nazywamy kolejno:

- Wokół osi X – gwiazda,
- Wokół osi Y – przewrót (potocznie: fikołek), przerzut (potocznie: fiflak), bez dotykania podłoża – salto,
- Wokół osi Z – obrót, piruet.

Figury te podsumowano na Rys. 5.



Rys. 5. Nazwy figur akrobatycznych wykonywanych wokół różnych osi obrotu.

Słowniczek

> **piruet**
>
> (z fran.: *pirouette*) obrót tancerza wokół własnej osi (pionowej).

Symulacja interaktywna

Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?

W symulacji mamy narysowaną ludzką postać. Możemy zmieniać jej masę, prędkość kątową i obserwować szybkość wirowania przy zmianie rozstawu ramion.

Uwaga: Praca z symulacją jest wygodniejsza po przełączeniu na widok pełnoekranowy.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 1

Ustal masę postaci i początkową prędkość kątową. Porównaj wielkości opisujące ruch obrotowy przy zmianie rozstawu ramion.

Uzupełnij tekst.

Po przyciągnięciu rąk do tułowia moment bezwładności _____, prędkość kątowa _____, a moment pędu _____.

nie ulega zmianie | maleje | rośnie

Polecenie 2

Jak wpływa na wartość momentu pędu: a) zmiana masy postaci, b) zmiana prędkości kątowej?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Które z poniższych wzorów przedstawiają zasadę zachowania momentu pędu bryły sztywnej? (L - moment pędu, I - moment bezwładności, ω - prędkość kątowa, m_r - masa ramienia, l - długość ramienia)

- [ ] Żadne z powyższych
- [ ] $\vec{L} = I\vec{\omega} = const$
- [ ] $I_1\vec{\omega_1} = I_2\vec{\omega_2}$
- [ ] $L = m_r\left(\frac{1}{3}l^2 + R^2 + Rl\right)\omega_1$

Ćwiczenie 2

Co się stanie z prędkością kątową łyżwiarza wykonującego piruet trzymając ręce nad głową, jeśli rozłoży ręce na bok? Prędkość kątowa:

- ( ) zwiększy się
- ( ) to zależy od tego jak szybko wykona ten ruch
- ( ) zmniejszy się
- ( ) nie zmieni się

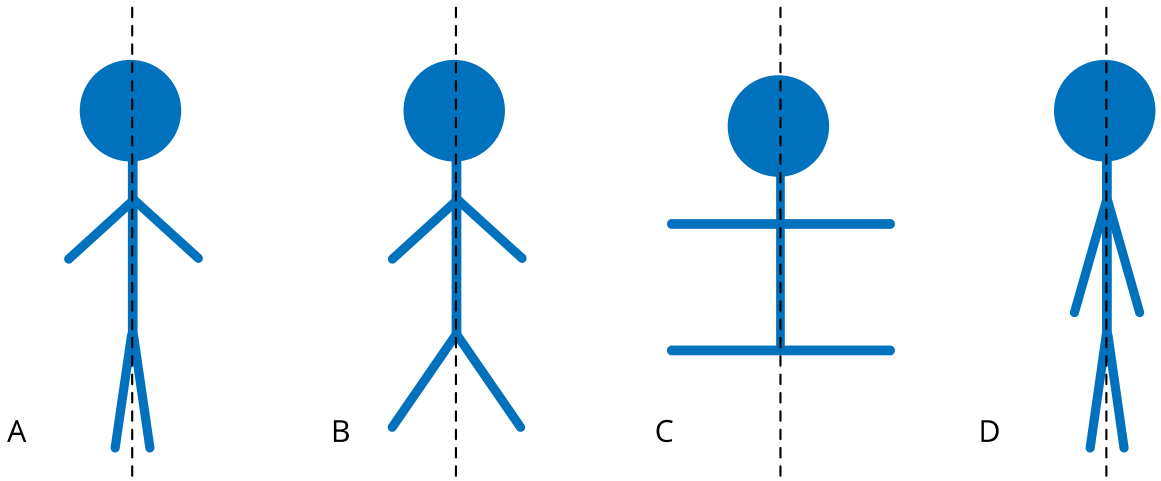
Ćwiczenie 3

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu dla bryły sztywnej można obliczyć, jaka będzie prędkość kątowa ciała ω_2 po tym, jak zmieni się jego moment bezwładności z I_1 na I_2, jeśli początkowo obracało się z prędkością kątową ω_1. Uzupełnij poniższe puste pola odpowiednimi działaniami i symbolami, aby otrzymać poprawną postać tego wzoru:

$\omega_2 = \omega_1 \cdot ($ [ ] [ ] [ ] $)$

$\frac{1}{I_1}$ $\frac{1}{I_2}$ $+$ $-$ I_1 I_2 $\cdot$

Ćwiczenie 4

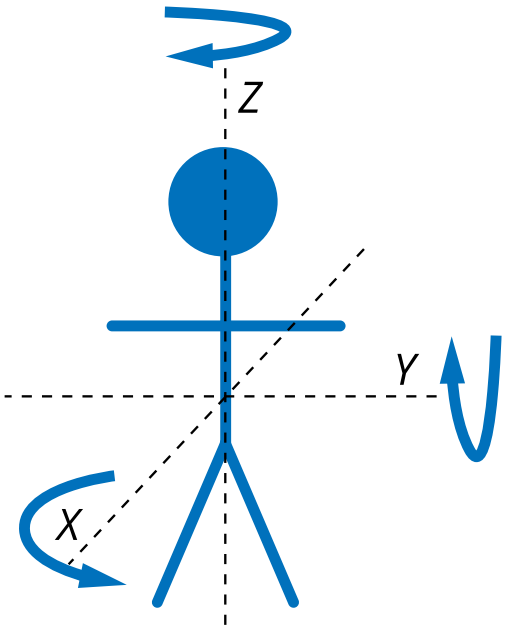


Ustaw obrazki A, B, C, D w taki sposób, aby moment bezwładności przestawionej postaci względem zaznaczonej osi zmniejszał się od lewej do prawej. Wpisz poprawną kolejność.

Odpowiedź: [ ] - [ ] - [ ] - [ ]

Ćwiczenie 5

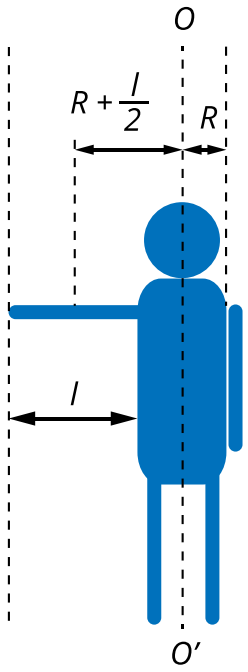
Na poniższym rysunku schematycznego modelu człowieka zaznaczono różne osie obrotu. Przyporządkuj nazwy figur akrobatycznych do tego, wokół której osi się one odbywają:



X	przewrót, przerzut, salto
Y	obrót, piruet
Z	gwiazda

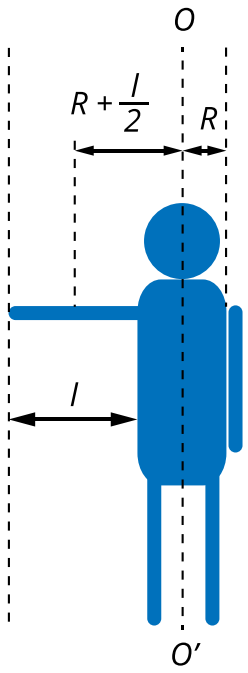
Ćwiczenie 6

Wyprowadź wzór na zmianę prędkości obrotowej człowieka, który najpierw obracał się z rozłożonymi ramionami, a następie trzymał je wzdłuż ciała, przyjmując oznaczenia jak na rysunku poniżej oraz: masa tułowia - m_t, masa ręki - m_r).



Ćwiczenie 7

Przyjrzyj się rysunkowi.



Przyjmij, że długość ramienia l = 50 cm, a promień tułowia R = 15 cm, zgodnie z oznaczeniami na rysunku. Ramię ustawione poziomo ma większy moment bezwładności I_{poziom} niż ramię zwisająco pionowo wzdłuż ciała, I_{pion}. Jak duża jest to różnica? Oblicz wartość stosunku momentów bezwładności $\frac{I_{\text{poziom}}}{I_{\text{pion}}}$. Odpowiedź wpisz w okienko poniżej, zaokrąglając ją do liczb całkowitych.

$\frac{I_{\text{poziom}}}{I_{\text{pion}}} \approx$ [ ]

$$R = 15cm$$

$$l = 50cm$$

Ćwiczenie 8

Jeśli moment bezwładności ciała zwiększył się dwukrotnie, to jak zmieniła się jego prędkość kątowa?

- Zmniejszyła się dwukrotnie
- Zmniejszyła się czterokrotnie
- Wzrosła dwukrotnie
- Wzrosła czterokrotnie

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Co łyżwiarstwo figurowe ma wspólnego z zasadą zachowania momentu pędu?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. omawia, w jakich codziennych sytuacjach można zaobserwować zasadę zachowania momentu pędu; 2. wyjaśnia zachowanie się łyżwiarzy na lodzie; 3. przeprowadza obliczenia wykorzystujące zasadę zachowania momentu pędu.
Strategie i metody nauczania:	strategia eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	praca indywidualna, pokaz
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu, projektor multimedialny
Materiały pomocnicze:	brak

PRZEBIEG LEKCJI

Faza wprowadzająca:

Nauczyciel pyta uczniów o to, czy ktoś uprawia łyżwiarstwo lub taniec. Nauczyciel prosi ochotnika o wykonanie pokazu – o wykonanie piruetu, czyli obrotu ciała wokół osi pionowej. Nauczyciel prosi uczniów o przyjrzenie się przede wszystkim ułożeniu rąk w trakcie wykonywania tej figury i zanotowanie, kiedy prędkość kątowa, z jaką obraca się osoba wykonująca obrót, wzrasta, a kiedy maleje. Nauczyciel prowadzi dyskusję na ten temat, prosząc uczniów o znalezienie analogii do tego doświadczenia również w innych sportach (np. akrobatyka, skoki do wody, taniec). Nauczyciel pyta uczniów o ich intuicyjne wytłumaczenie zaobserwowanego zjawiska.

Faza realizacyjna:

Nauczyciel zapisuje na tablicy zasadę zachowania pędu w postaci pokazującej, że iloczyn prędkości kątowej i momentu bezwładności jest wartością stałą: $I_1\overrightarrow{\omega_1} = I_2\overrightarrow{\omega_2}$. Nauczyciel przechodzi do prezentacji symulacji z niniejszego e-materiału, wprowadzając parametry zaproponowane przez uczniów (przykładowo masy tancerzy odpowiadające masie ciała człowieka w ich wieku). Po przeprowadzeniu serii symulacji nauczyciel prosi uczniów o zapisanie wniosków.

Faza podsumowująca:

Dla upewnienia się, że uczniowie zrozumieli omawiane zagadnienie, nauczyciel prosi ich o wykonanie zadań 1, 2, 3, 4 i 8 z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel indywidualnie sprawdza prace uczniów i na tej podstawie określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele. Na koniec nauczyciel zadaje pracę domową.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań, których nie rozwiązano w trakcie lekcji, czyli zadania 5, 6 i 7 w celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości dotyczących zasady zachowania momentu pędu.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Symulacja może być wykorzystana zgodnie ze scenariuszem. Można również rozpocząć lekcję od wykonania symulacji, a następnie wykonać eksperyment, aby potwierdzić przewidywania teoretyczne.