

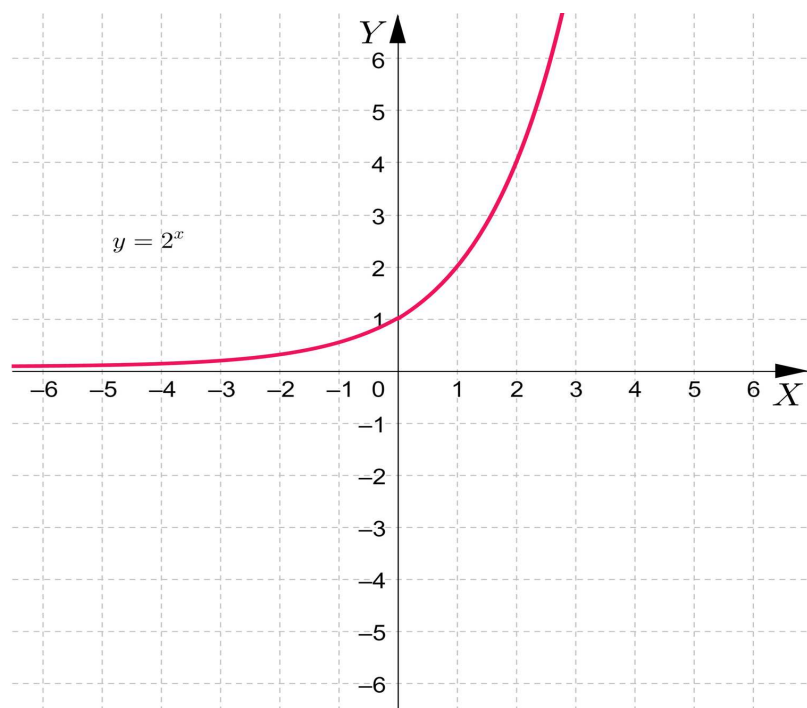


## Równania asymptot funkcji homograficznej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

## Równania asymptot funkcji homograficznej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.



Na powyższych wykresach można zauważyć, że krzywe będące wykresami niektórych funkcji zbliżają się do pewnych prostych. Proste te nazywamy asymptotami. Nie są one

częścią wykresu, są pomocne przy szkicowaniu wykresów funkcji. W tym materiale dokładnie omówimy asymptoty funkcji homograficznej.

### Twoje cele

- Rozpoznaś asymptotę funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wykresu tej funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wzoru funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wzoru funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wykresu funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  na podstawie wzoru funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  na podstawie wykresu funkcji.

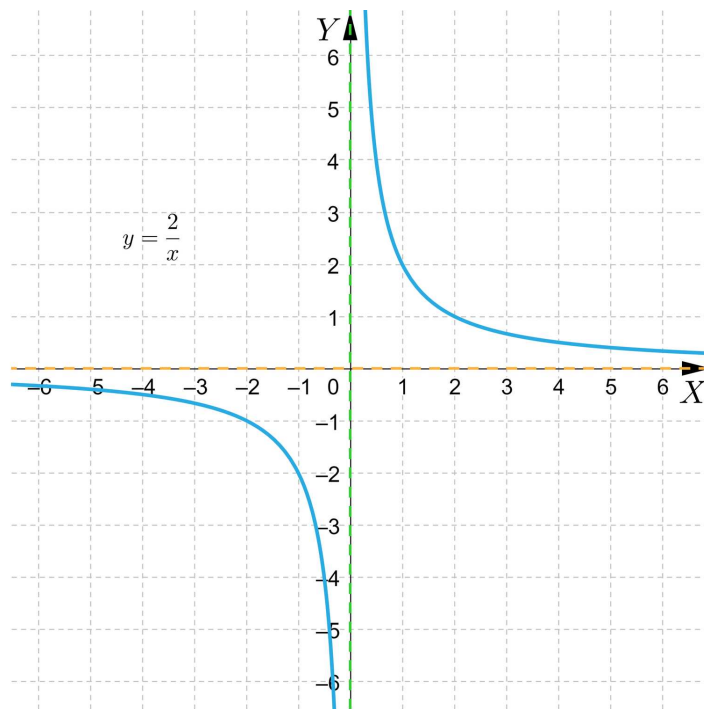
# Przeczytaj

## Definicja: asymptota krzywej

Prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej odległość tego punktu od prostej dąży do zera. Asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji.

## Przykład 1

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $f(x) = \frac{2}{x}$ .



Wyznamy równania asymptot.

## Rozwiązanie

Wykres funkcji posiada dwie asymptoty: pionową – o równaniu  $x = 0$  (zielona przerywana linia) oraz poziomą – o równaniu  $y = 0$  (pomarańczowa przerywana linia).

## Reguła: 1

Wykres każdej funkcji postaci  $f(x) = \frac{a}{x}$ , dla  $a \neq 0$  i  $x \neq 0$  posiada dwie asymptoty – pionową o równaniu  $x = 0$ , oraz poziomą o równaniu  $y = 0$ .

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla  $x = 0$  i właśnie prosta o równaniu  $x = 0$  jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości  $y = 0$  i prosta  $y = 0$  jest

asymptotą poziomą.

## Przykład 2

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{4}{x-3} - 2$ .

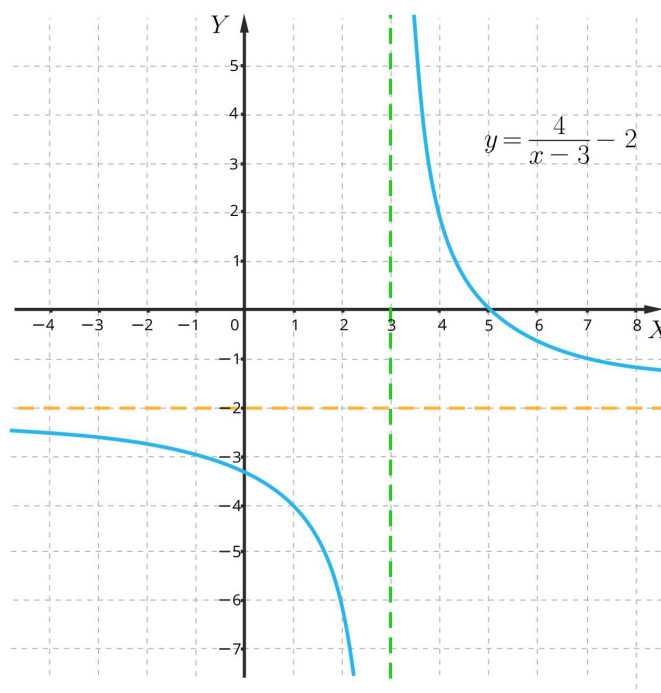
### Rozwiązanie

Wykres funkcji  $f(x) = \frac{4}{x-3} - 2$  powstaje w wyniku **translacji** wykresu funkcji  $g(x) = \frac{4}{x}$  o wektor  $[3, -2]$ . Przesunięciu ulegają również asymptoty.

Równanie asymptoty pionowej:  $x = 3$ .

Równanie asymptoty poziomej:  $y = -2$ .

Poniższy rysunek przedstawia opisaną sytuację.



### Ważne!

Zauważmy, że wraz z przesunięciem asymptot zmianie uległa dziedzina i zbiór wartości funkcji.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

### Reguła: 2

Asymptotami wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  są proste o równaniach:

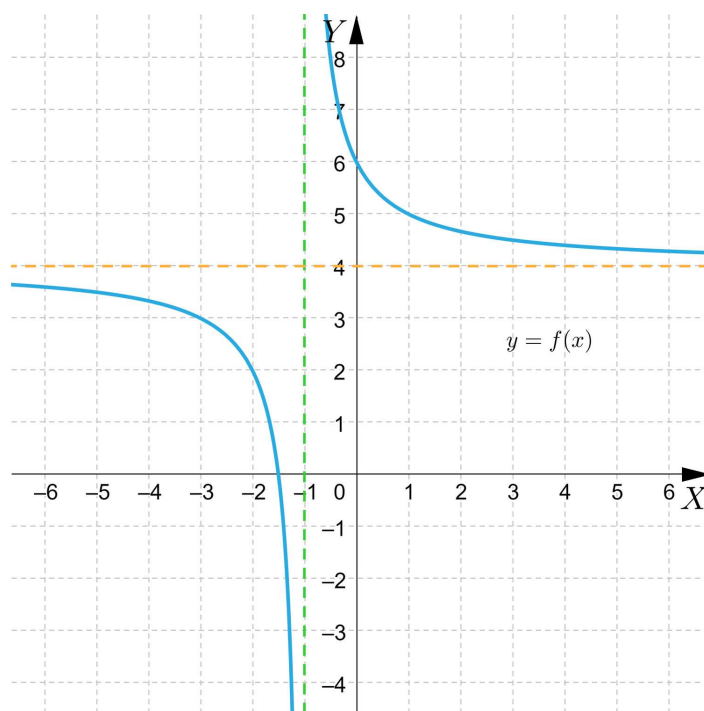


- $x = p$  – asymptota pionowa,
- $y = q$  – asymptota pozioma.

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla  $x = p$  i właśnie prosta o równaniu  $x = p$  jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości  $y = q$  i prosta  $y = q$  jest asymptotą poziomą.

### Przykład 3

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji na podstawie jej wykresu.



### Rozwiązanie

Równanie asymptoty pionowej:  $x = -1$ .

Równanie asymptoty poziomej:  $y = 4$ .

### Przykład 4

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{1}{x+5} + 3$ .

### Rozwiązanie

Zgodnie z regułą 2:

równanie asymptoty pionowej:  $x = -5$ ,

równanie asymptoty poziomej:  $y = 3$ .

## Przykład 5

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{-4x-5}{x+2}$ .

### Rozwiązanie

Aby wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{-4x-5}{x+2}$  należy wzór funkcji przekształcić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{-4x-5}{x+2} = \frac{-4(x+2)+3}{x+2} = -4 + \frac{3}{x+2}.$$

Równanie asymptoty pionowej:  $x = -2$ .

Równanie asymptoty poziomej:  $y = -4$ .

## Słownik

translacja

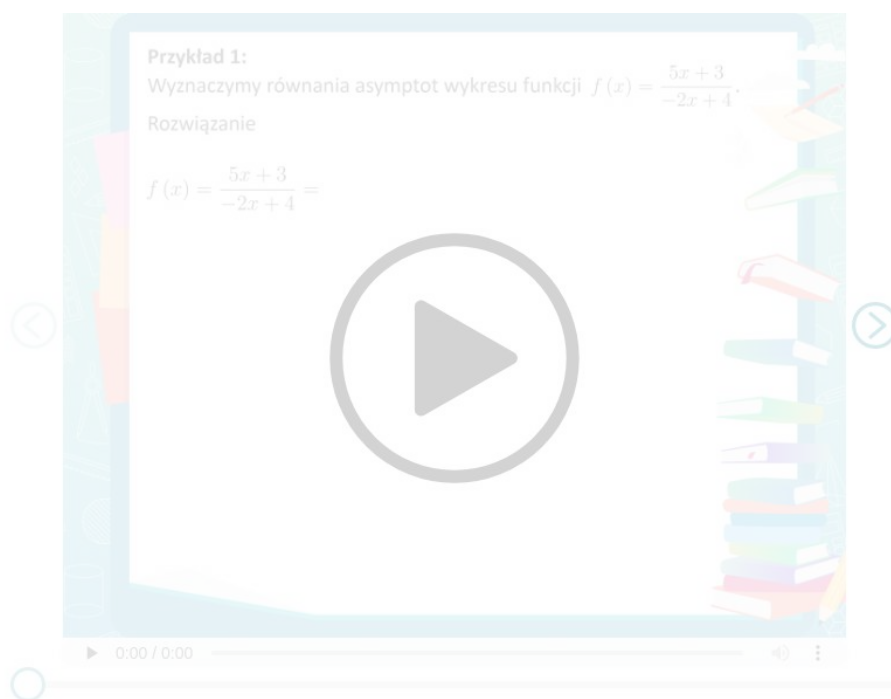
przesunięcie równoległe

# Prezentacja multimedialna

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną oraz rozwiązaniami zadań. Na ich podstawie wykonaj Polecenie 2 i 3.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUvMpmLR5>



## Polecenie 2

Asymptotami wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3x-5}{2x+4}$  są proste o równaniach:

☐  $y = -2$

☐  $y = \frac{3}{2}$

☐  $y = \frac{5}{3}$

☐  $y = \frac{2}{3}$

☐  $y = 3$

☐  $x = \frac{3}{2}$

☐  $x = -4$

☐  $x = -2$

## Polecenie 3

Połącz w pary wzory funkcji ze wzorami asymptot wykresów tych funkcji.

$$f(x) = \frac{-4x+2}{x-2}$$

$$x = 2, y = -4$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$$

$$x = 4, y = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{2x-8}$$

$$x = -2, y = 4$$

$$f(x) = \frac{-4x+8}{-x-2}$$

$$x = -4, y = 2$$

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Asymptota pionowa wykresu funkcji  $f(x) = \frac{2}{x+3} - 3$  ma równanie:

☐  $y = -3$

☐  $y = 3$

☐  $x = -3$

☐  $x = 3$

## Ćwiczenie 2



Asymptota pozioma wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{5}{x-2} - 2$  ma równanie:

☐  $y = 2$

☐  $x = -2$

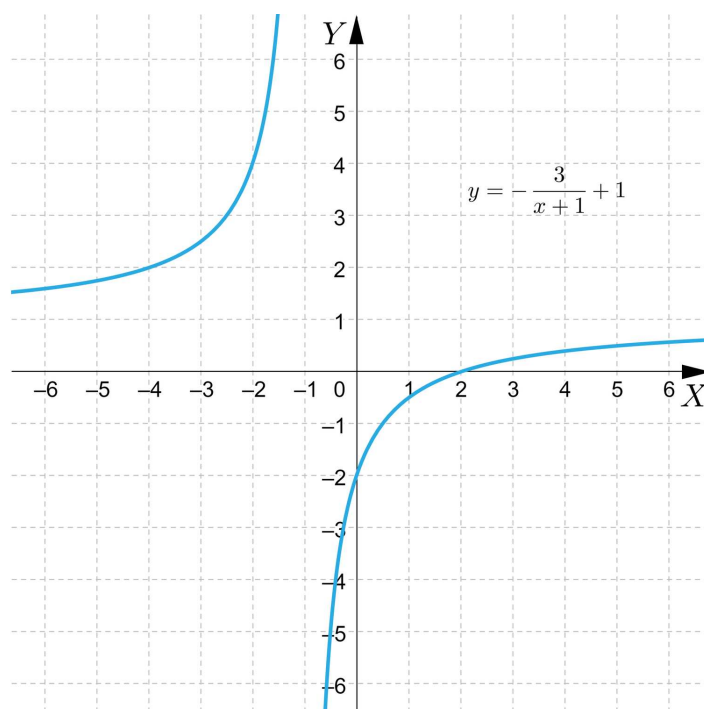
☐  $x = 2$

☐  $y = -2$

### Ćwiczenie 3



Wskaż równania wszystkich asymptot wykresu funkcji:



☐  $y = 1$

☐  $x = -1$

☐  $y = -1$

☐  $x = 1$

## Ćwiczenie 4



Pogrupuj funkcje ze względu na równania asymptot. Kliknij w odpowiedź, aby wyświetlić listę i wybrać odpowiednią grupę lub przeciągnij odpowiedź do odpowiedniej grupy.

Funkcje, których asymptota ma równanie  $x = 4$ :

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+4} + 4$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-4} - 4$$

Funkcje, których asymptota ma równanie  $y = 4$ :

## Ćwiczenie 5



Uzupełnij zdania. Kliknij w lukę, aby wyświetlić listy i wybrać prawidłową odpowiedź lub przeciągnij odpowiednią odpowiedź w lukę.

Asymptotą pionową wykresu funkcji  $f(x) = \frac{-7}{x+5}$  jest prosta o równaniu .

Asymptotą poziomą wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu .

$$x = 5$$

$$x = -7$$

$$y = 0$$

$$x = -5$$

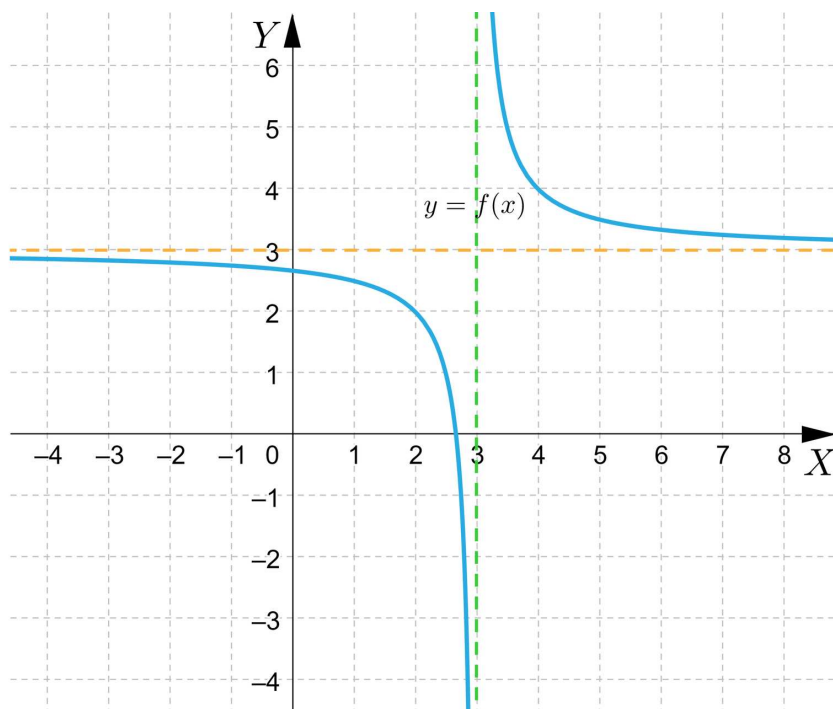
$$y = -7$$

$$x = 0$$

## Ćwiczenie 6



Na podstawie wykresu wskaż wzór funkcji.



☐  $g(x) = \frac{1}{x+3} + 3$

☐  $g(x) = -\frac{1}{x+3} + 3$

☐  $g(x) = -\frac{1}{x-3} + 3$

☐  $g(x) = \frac{1}{x-3} + 3$

## Ćwiczenie 7



Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ .

Równanie asymptoty poziomej:  $y =$  .

Równanie asymptoty pionowej:  $x =$  .

### Ćwiczenie 8



Połącz w pary wzory funkcji ze wzorami asymptot wykresów tych funkcji.

$$g(x) = \frac{5x+23}{x-5}$$

$$x = 0$$

$$f(x) = \frac{-5x-23}{x+5}$$

$$y = -5$$

$$w(x) = \frac{-1}{x+5}$$

$$x = 5$$

$$h(x) = \frac{5x-1}{x}$$

$$y = 0$$

### Ćwiczenie 9



Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{-2x+4}{x-1}$ . Narysuj wykres tej funkcji.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Gabriela Pendyk

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Równania asymptot funkcji homograficznej

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

13) posługuje się funkcją  $f(x) = \frac{a}{x}$ , w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza równania asymptot na podstawie wzoru funkcji homograficznej w postaci kanoniczej;
- wyznacza równania asymptot na podstawie wykresu funkcji homograficznej;
- wyznacza równania asymptot na podstawie wzoru funkcji homograficznej w postaci ogólnej.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania:**



- dyskusja;
- burza mózgów;
- lekcja odwrócona.

### **Formy pracy:**

- praca w grupach;
- praca indywidualna.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie zapoznają się z sekcją „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie przypominają najważniejsze informacje dotyczące rysowania i przekształcania wykresów funkcji homograficznej.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel w razie potrzeby pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – zapoznają się z prezentacją multimedialną i wykonują wskazane polecenia oraz rozwiązują ćwiczenia 1 – 4 w sekcji „Sprawdź się”. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia 5 – 8 zawarte w sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych
- Wykres funkcji  $y = \frac{a}{x}$

**Wskazówki metodyczne:**

- Prezentację multimedialną można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości z działu funkcja homograficzna.
- Prezentację multimedialną można również wykorzystać w realizacji lekcji „Różne rodzaje asymptot”.