



Znajdowanie współczynników liczbowych równania wielomianowego spełniającego określone warunki

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Znajdowanie współczynników liczbowych równania wielomianowego spełniającego określone warunki

Źródło: id irplr, dostępny w internecie: www.piqsels.com.

Twoim zadaniem będzie określanie warunków, dla których równanie wielomianowe ma żądaną własność, np. rozwiązanie jest konkretną liczbą lub równanie posiada pierwiastek wielokrotny.

Nauczysz się również wyznaczać współczynniki liczbowe równania wielomianowego znając jego pierwiastki lub zależności między pierwiastkami (np. jeden pierwiastek jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych).

Twoje cele

- Określisz warunki, dla których rozwiązanie równania wielomianowego ma żądaną własność.
- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametrów, aby dana liczba była rozwiązaniem równania.
- Znajdziesz współczynniki liczbowe równania wielomianowego spełniające określone warunki.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$ nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n .

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą a , dla której zachodzi warunek $W(a) = 0$. Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Definicja: Liczba rozwiązań równania wielomianowego

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

Przykład 1

Wyznamy taką wartość parametru a , aby liczba (-1) była pierwiastkiem równania $x^4 + (4a - 2)x^3 - x^2 - 2x = 0$. Dla ustalonej wartości parametru a obliczymy pozostałe rozwiązania równania.

Ponieważ liczba (-1) jest rozwiązaniem równania, więc zgodnie z definicją mamy:

$$(-1)^4 + (4a - 2) \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) = 0$$

$$1 - 4a + 2 - 1 + 2 = 0$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Dla parametru $a = 1$ liczba (-1) jest rozwiązaniem równania. Wtedy równanie przyjmuje postać $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$.

Obliczymy teraz pozostałe rozwiązania tego równania. Wykorzystamy metodę grupowania wyrazów.

$$x^3(x + 2) - x(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(x^3 - x) = 0$$

$$(x + 2)(x^2 - 1) \cdot x = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0 \text{ lub } x + 1 = 0 \text{ lub } x = 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 0$$

Równanie ma cztery **rozwiązania**: $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

Przykład 2

Liczby (-1) i 3 są rozwiązaniami równania $x^3 - (a + 2)x^2 + bx + 15 = 0$. Obliczymy wartości współczynników a i b . Ponieważ liczby (-1) i 3 są rozwiązaniami równania więc możemy zapisać zależności:

$$\begin{cases} (-1)^3 - (a + 2)(-1)^2 + b(-1) + 15 = 0 \\ 3^3 - (a + 2) \cdot 3^2 + 3b + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 - a - 2 - b + 15 = 0 \\ 27 - 9a - 18 + 3b + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - b = -12 \\ -9a + 3b = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ -3a + b = -8 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań metodą przeciwnych współczynników otrzymujemy:

$$4a = 20$$

$$a = 5$$

$$5 + b = 12$$

$$b = 7$$

Szukane współczynniki to $a = 5$ i $b = 7$.

Przykład 3

Wyznamy wartości parametrów n i k wiedząc, że równanie

$8x^3 + 3nx^2 + 6k^2x + 8 = 0$ ma trzykrotny pierwiastek. Obliczymy ten **pierwiastek**.

Jeżeli p jest trzykrotnym pierwiastkiem równania, to ponieważ równanie jest trzeciego stopnia, możemy równanie zapisać w postaci $8(x - p)^3 = 0$. Następnie zastosujemy wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy dwóch wyrażeń.

$$8(x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3) = 0$$

$$8x^3 - 24px^2 + 24p^2x - 8p^3 = 0$$

Porównując współczynniki równania otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3n = -24p \\ 6k^2 = 24p^2 \\ 8 = -8p^3 \end{cases}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $p = -1$.

$$3n = 24$$

$$n = 8$$

$$6k^2 = 24$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2 \text{ lub } k = -2$$

Trzykrotny pierwiastek równania to $p = -1$, natomiast $n = 8$, $k = -2$ lub $k = 2$.

Przykład 4

Wyznamy takie wartości parametru k , dla których jedno z rozwiązań równania $4x^3 + (k - 3)x^2 - x = 0$ jest średnią arytmetyczną pozostałych rozwiązań równania. Najpierw wyłączmy przed nawias wspólny czynnik.

$$x[4x^2 + (k - 3)x - 1] = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 4x^2 + (k - 3)x - 1 = 0$$

$$4x^2 + (k - 3)x - 1 = 0$$

$\Delta = (k - 3)^2 + 16 > 0$ dla dowolnego k , zatem równanie ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 .

Ze wzorów Viète'a otrzymamy:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4} < 0,$$

czyli rozwiązania równania mają różne znaki.

Zatem musi zachodzić warunek $\frac{x_1 + x_2}{2} = 0$.

Ze wzoru na sumę pierwiastków otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(k-3)}{4}$$

$$\frac{-(k-3)}{4} = 0$$

$$k - 3 = 0$$

$$k = 3.$$

Aby rozwiązania równania spełniały warunek parametr $k = 3$.

Przykład 5

Obliczymy, dla jakich wartości współczynnika z równanie $x^4 - 4z^2 - x^2 + 2z = 0$ ma 4 rozwiązania.

$$x^4 - 4z^2 - x^2 + 2z = 0$$

$$(x^2 - 2z)(x^2 + 2z) - (x^2 - 2z) = 0$$

Wyłączymy przed nawias wyrażenie $(x^2 - 2z)$.

$$(x^2 - 2z)(x^2 + 2z - 1) = 0$$

$$x^2 - 2z = 0 \text{ lub } x^2 + 2z - 1 = 0$$

$$x^2 = 2z \text{ lub } x^2 = -2z + 1$$

Aby równanie $x^2 = 2z$ miało dwa rozwiązania $2z > 0$.

$$z > 0$$

Równanie $x^2 = -2z + 1$ będzie miało dwa rozwiązania dla $-2z + 1 > 0$.

$$-2z > -1$$

$$z < \frac{1}{2}$$

Uwzględniając oba warunki $z \in (0, \frac{1}{2})$. Aby równanie miało 4 rozwiązania $z \in (0, \frac{1}{2})$.

Słownik

rozwiązanie równania $W(x) = 0$

wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$

pierwiastek wielomianu $W(x)$

liczba rzeczywista a , dla której zachodzi warunek $W(a) = 0$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykłady, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, analizując poszczególne zdjęcia.

Przykład 1

Wyznamy wszystkie wartości parametru z , dla których równanie $(z + 1)x^4 - 4zx^2 + z + 1 = 0$ ma cztery rozwiązania.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = p$, $p \geq 0$.

$$(z + 1)p^2 - 4zp + z + 1 = 0$$



Przykład 1

①

Wyznamy wszystkie wartości parametru z , dla których równanie $(z + 1)x^4 - 4zx^2 + z + 1 = 0$ ma cztery rozwiązania.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = p$, $p \geq 0$.

$$(z + 1)p^2 - 4zp + z + 1 = 0$$



1. {audio}Równanie sprowadzimy do równania kwadratowego ze zmienną p .

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru m , równanie $x^4 - mx^2 + m + 4 = 0$ ma cztery różne rozwiązania?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeśli liczba 2 jest pierwiastkiem równania $x^3 - (a + 1)x^2 + ax = 0$ to współczynnik a jest równy:

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ -2

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Dla $a = 1$ pierwiastkami równania $x^3 - (a + 2)x^2 + 2x = 0$ są liczby:

☐ 1

☐ -2

☐ -1

☐ 2

☐ 0

Ćwiczenie 3



Wpisz w wyznaczone miejsca odpowiednie liczby.

Wiedząc, że liczby (-2) i 1 są rozwiązaniami równania $x^3 + (a - 1)x^2 - 5x + b = 0$ oblicz wartość współczynników liczbowych a i b .

$a =$

$b =$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij brakujące wyrażenia.

Jeżeli równanie $2x^3 + (m + 4)x^2 + 2nx + 2 = 0$ ma potrójny pierwiastek p to:

$m + 4 =$

$2n =$

$2 =$

Ćwiczenie 5



Wyznacz współczynniki a, b, c tak, aby zachodziła równość
 $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$a =$

$b =$

$c =$

Ćwiczenie 6



Określ, które zdania są prawdziwe. Równanie $x^3 - (m + 8)x^2 + 11mx - 48 = 0$ ma trzy rozwiązania. Liczba 4 będąca rozwiązaniem równania jest średnią arytmetyczną pozostałych rozwiązań równania.

☐ Pozostałe rozwiązania równania są liczbami przeciwnymi.

☐ Jednym z rozwiązań równania jest liczba 0.

☐ Suma pierwiastków równania jest równa 12.

☐ Pierwiastki równania to 2, 4, 6.

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości współczynnika z równanie $x^4 - x^2 - z^2 - z = 0$ ma cztery różne rozwiązania?

$z \in (\text{ }, \text{ })$

2

1

∞

0

$-\infty$

-1

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeżeli liczby (-1) i 1 są rozwiązaniami równania $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, to zachodzi warunek $b + d = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Znajdowanie współczynników liczbowych równania wielomianowego spełniającego określone warunki

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa warunki, dla których rozwiązanie równania wielomianowego ma żądaną własność,
- znajduje wszystkie takie wartości rzeczywiste parametrów, aby dana liczba była rozwiązaniem równania,

- znajduje współczynniki liczbowe równania wielomianowego spełniające określone warunki;
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu, słuchawki,
- projektor multimedialny, tablica interaktywna,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
- Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań wielomianowych.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi wyznaczania pierwiastków równania wielomianowego oraz znajdowaniem współczynników równania, które przygotowali w domu.
- Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
- Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
- Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

- Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów znajdowania współczynników liczbowych równania wielomianowego.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

- Uczniowie, którym nie udało się zakończyć rozwiązywania zadań interaktywnych rozwiązują pozostałe zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

- [Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu](#)

Wskazówki metodyczne:

- Przykłady zawarte w galerii uczniowie mogą przeanalizować samodzielnie w domu.
- Galeria zdjęć interaktywnych może być też wykorzystana na zajęciach dotyczących pierwiastków wielomianów.