



Długości odcinków w ostrosłupach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Długości odcinków w ostrosłupach

Źródło: Bill Kasman, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Matematyka, a w szczególności geometria, od zawsze stara się odwzorowywać obiekty, które istnieją w otaczającym nas świecie. Nie bez przyczyny jednymi z pierwszych historycznie zagadnień matematycznych były konstrukcje geometryczne. Dopiero wtórnym wynalazkiem matematyki są liczby, interpretowane zresztą jako długości odcinków. Matematyka pozwala w czytelnym języku zapisać projekty budynków, maszyn i innych przedmiotów codziennego użytku.



Źródło: dostępny w internecie: www.wikipedia.org / www.Pixabay.com, licencja: CC BY 3.0.

Projektując przedmioty w kształcie ostrosłupa na pewno spotkasz się z koniecznością wyznaczenia długości jego krawędzi albo wysokości tak, aby w sposób optymalny spełnić niezbędne kryteria. Jakiej długości muszą być rurki użyte w szkieletcie szalasu, aby jego wysokość miała co najmniej 2 metry? Jak wyznaczyć wysokość wieży, aby kąt nachylenia dachu nie przekraczał ustalonych norm? Tego typu zagadnienia rozwiązesz, jeżeli poznasz metody obliczania długości odcinków w ostrosłupach.

Twoje cele

- Nauczysz się tworzyć strategię rozwiązania, dzięki której wyznaczysz długości wskazanych odcinków.
- Wykorzystasz związki między poszczególnymi długościami odcinków w ostrosłupie.
- Sklasyfikujesz rodzaje kątów i odcinków w ostrosłupach.

Przeczytaj

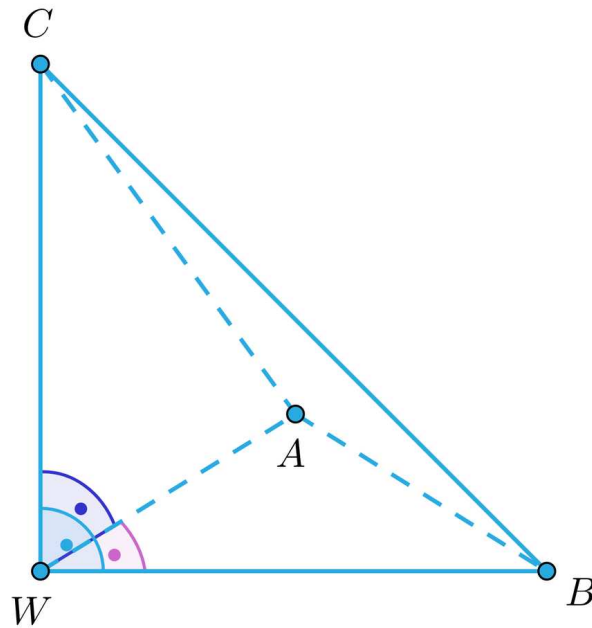
Znamy już podstawowe własności ostrosłupów. Kolejną umiejętnością, którą należy opanować, jest ustalenie strategii rozwiązania problemu w sytuacji, gdy autor nie sugeruje, jakich narzędzi matematycznych należy użyć, by rozwiązać zadanie. Wbrew pozorom, nie jest to łatwe, by wybrać taki sposób rozwiązania zadania, który będzie nie tylko poprawny, ale również najwygodniejszy rachunkowo. Kolejnym ważnym elementem ustalania strategii rozwiązania zadania jest taka analiza tekstu zadania, która pozwoli nam odkryć własności brył, o których autor zadania nie mówi wprost. Należy wówczas szczególnie skupić się na uzasadnieniu, dlaczego bryła spełniająca warunki zadania musi mieć wskazane przez nas własności. Aby przekonać się, jak bardzo pomysł na strategię rozwiązania zadania może zmienić czas jego rozwiązania, przedstawimy poniżej kilka przykładów, których rozwiązanie jest krótkie, ale tylko wtedy, gdy mamy na nie dobry pomysł.

Przykład 1

Dany jest **ostrosłup prawidłowy** trójkątny. Trzy jego ściany boczne są wzajemnie prostopadłe. Pole każdej z tych ścian jest równe 18. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że informacją wyróżniającą dany ostrosłup z rodziny wszystkich ostrosłupów prawidłowych jest fakt, że jego ściany boczne są do siebie wzajemnie prostopadłe. Z taką sytuacją trzech ścian o wspólnym wierzchołku wzajemnie prostopadłych do siebie mieliśmy do czynienia w narożach sześcianu. Zauważmy dodatkowo, że ostrosłup jest prawidłowy, zatem w podstawie ma trójkąt równoboczny. Oznacza to, że wszystkie trzy ściany boczne ostrosłupa muszą być trójkątami prostokątnymi, równoramiennymi i przystającymi do siebie. Ostatecznie naszą bryłę można przedstawić następująco, umieszczając poziomo jedną ze ścian bocznych, aby lepiej dostrzec własności ostrosłupa:



Wiemy, że pole jednej ściany bocznej jest równe 18. Przyjmując, że krawędź boczna ostrosłupa jest długości b , możemy napisać następującą zależność:

$$\frac{1}{2}b^2 = 18$$

$$b^2 = 36$$

$$b = 6.$$

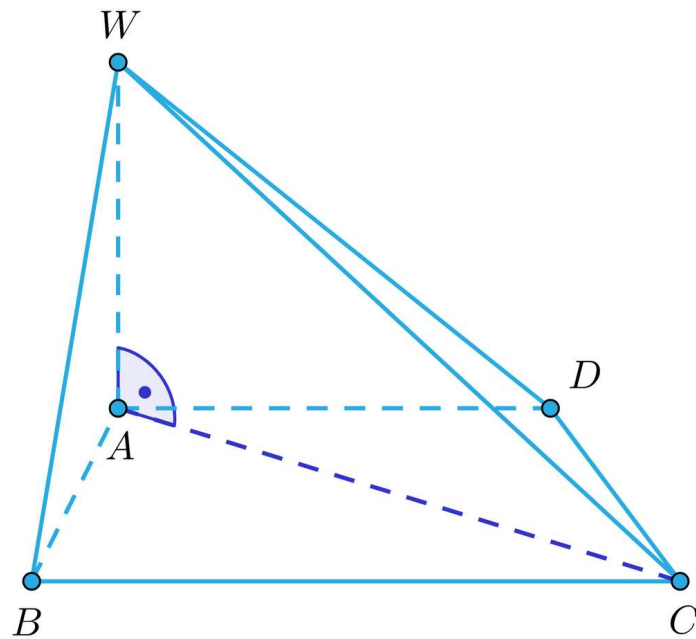
Ale ponieważ krawędź ostrosłupa jest przeciwprostokątną trójkąta ściany bocznej, to jest ona długości $a = 6\sqrt{2}$.

Przykład 2

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest trapez prostokątny $ABCD$. W trapezie tym jedna z podstaw ma długość 7, a jedna z przekątnych ma długość $\sqrt{34}$. Krawędź AW jest wysokością ostrosłupa i jest równa 7. Wiadomo ponadto, że długość krawędzi bocznej CW ostrosłupa jest równa $\sqrt{107}$. Oblicz długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Rozwiązanie.

Na wstępie, jak zawsze, chcielibyśmy naszkicować opisaną sytuację. Jest z tym jednak pewien kłopot, bo nie wiemy, ani które krawędzie podstawy ostrosłupa są podstawami trapezu, ani też, przy których wierzchołkach są kąty proste trapezu. Wykonajmy zatem na ten moment szkic ostrosłupa, w którym nie będziemy jeszcze zaznaczać własności jego podstawy.



Skoro krawędź AW jest wysokością ostrosłupa, to trójkąt CAW jest prostokątny. Pozwala nam to z twierdzenia Pitagorasa wyznaczyć długość przekątnej AC trapezu:

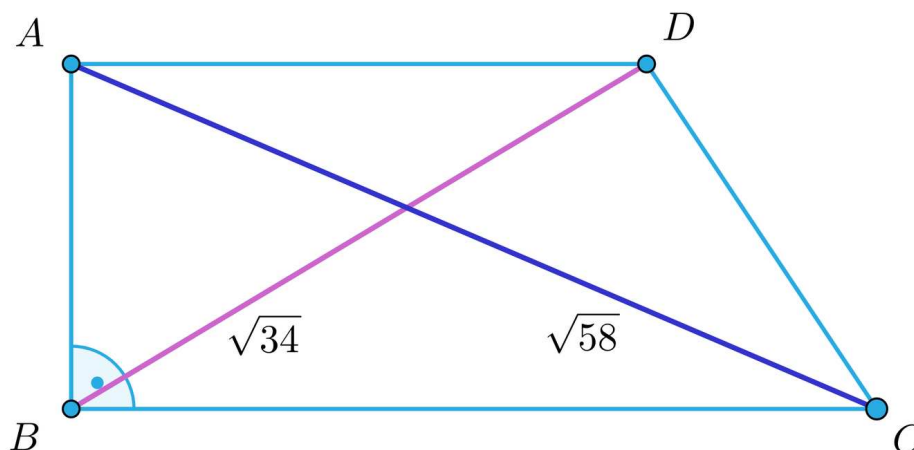
$$|AW|^2 + |AC|^2 = |CW|^2$$

$$7^2 + |AC|^2 = \sqrt{107}^2$$

$$|AC|^2 = 107 - 49$$

$$|AC| = \sqrt{58}.$$

Wiemy, że jedna z przekątnych trapezu ma długość $\sqrt{34}$, więc AC musi być drugą, dłuższą przekątną. Zauważmy ponadto, że $7 = \sqrt{49} > \sqrt{34}$, więc pamiętając, że przeciwprostokątna zawsze jest dłuższa od przyprostokątnej, wyciągnąć możemy wniosek, że podstawa długości 7 jest dłuższą podstawą trapezu. To pozwala nam dokładniej zająć się tym czworokątem. Naszkicujmy go bez deformacji:



Możemy teraz obliczyć jego wysokość, ponownie z twierdzenia Pitagorasa, tym razem w trójkącie ABC :

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$|AB|^2 + 7^2 = \sqrt{58}^2$$

$$|AB|^2 = 58 - 49$$

$$|AB| = 3.$$

Następnie, z trójkąta BAD obliczamy długość krótszej podstawy trapezu:

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$$

$$3^2 + |AD|^2 = \sqrt{34}^2$$

$$|AD|^2 = 34 - 9$$

$$|AD| = 5.$$

Zauważmy, że znamy już obie podstawy i wysokość trapezu. Na tej podstawie możemy obliczyć, że ramię DC ma długość pierwiastek z 13.

Mamy już potrzebne długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Aby wyznaczyć długości brakujących krawędzi bocznych BW oraz DW , wystarczy wykorzystać prostokątne trójkąty ścian bocznych.

Z trójkąta BAW mamy:

$$|AW|^2 + |AB|^2 = |BW|^2$$

$$7^2 + 3^2 = |BW|^2$$

$$58 = |BW|^2$$

$$|BW| = \sqrt{58}.$$

Analogicznie z trójkąta DAW mamy:

$$|AW|^2 + |AD|^2 = |DW|^2$$

$$7^2 + 5^2 = |DW|^2$$

$$74 = |DW|^2$$

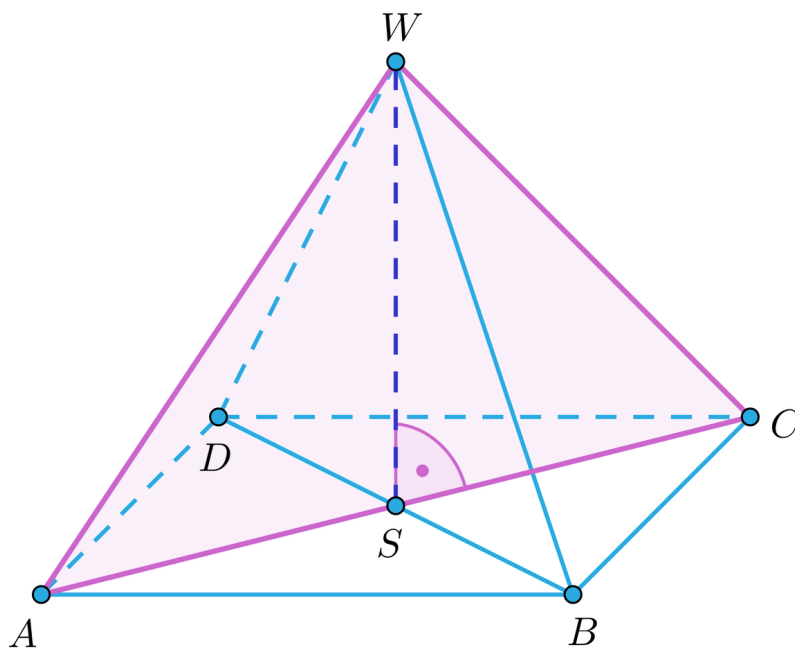
$$|DW| = \sqrt{74}.$$

Przykład 3

Rozważmy te ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma długości wysokości i krawędzi podstawy jest równa 8. Spośród tych ostrosłupów wybrano taki, że pole trójkąta, którego bokami są krawędzie boczne i przekątna podstawy ostrosłupa, jest największe. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa.

Rozwiązanie.

Problem powyżej przedstawiony jest typowym problemem optymalizacyjnym. Zaczniemy oczywiście od rysunku ostrosłupa:



Przypomnijmy, że rozwiązując zadania optymalizacyjne, musimy stworzyć funkcję jednej zmiennej, która opisuje wielkość ekstremalną zgodnie z tekstem zadania (u nas pole trójkąta ACW). Jeżeli przyjmiemy, że krawędź podstawy ostrosłupa oznaczmy symbolem a , zaś wysokość ostrosłupa symbolem h , to:

$$P_{\Delta AWC} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot h.$$

Jednocześnie z tekstu zadania wiemy, że $h + a = 8$, a zatem funkcję pola wyraża wzór:

$$P(a) = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (8 - a).$$

Dziedziną tej funkcji jest przedział obustronnie otwarty $(0, 8)$.

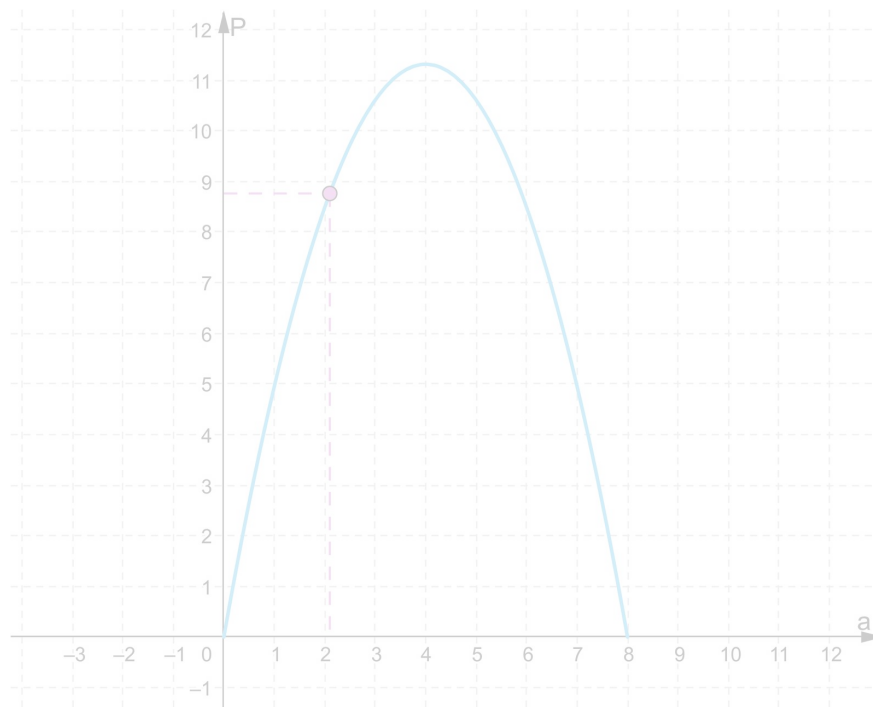
Aby wyznaczyć argument, dla którego funkcja przyjmuje swoją maksymalną wartość, zauważmy, że jest to funkcja kwadratowa, której wykresem jest parabola ramionami skierowana w dół. Łatwo zapisać wzór tej funkcji w [postaci iloczynowej](#):

$$P(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot (a - 8).$$

Z tej postaci, korzystając z symetrii paraboli, możemy wskazać pierwszą współrzędną jej wierzchołka

$$p = \frac{0+8}{2} = 4.$$

Konsekwentnie oznacza to, że pole trójkąta AWC jest maksymalne, gdy $a = 4$ oraz $h = 8 - 4 = 4$. Dla zainteresowanych umieszczamy poniżej aplet, na którym można prześledzić, jak wygląda wykres omawianej przez nas funkcji i ile jest równe pole trójkąta przy przyjętej z góry długości $a \in (0, 8)$ krawędzi ostrosłupa.



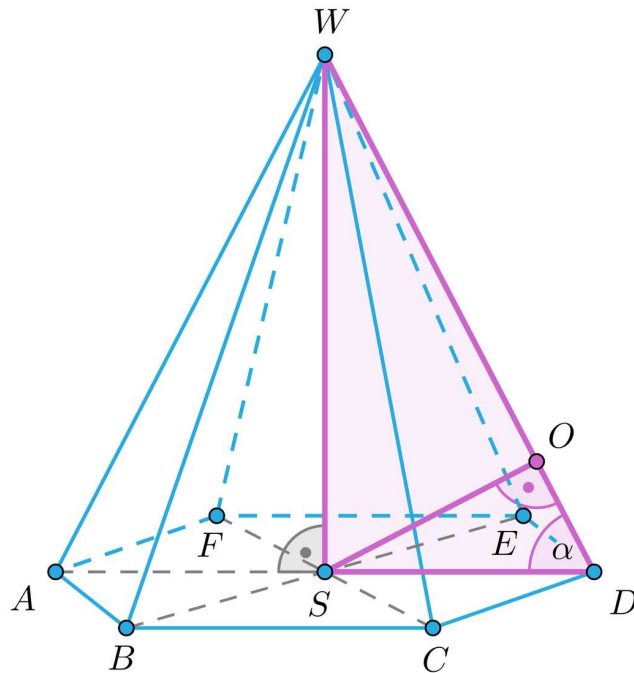
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXPI2QJrM>

Przykład 4

Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy jest równa 6 a wysokość jest równa 8. Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od jego krawędzi bocznej.

Rozwiązanie.

Aby wskazać odcinek, którego długość mamy obliczyć zgodnie z poleceniem zadania, musimy spodek wysokości S ostrosłupa połączyć pod kątem prostym z krawędzią boczną ostrosłupa. Naszkicujmy tę sytuację:



Zauważmy, że podstawa ostrosłupa jest **sześciokątem foremnym**, zatem długość odcinka SD jest równa długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Obliczymy teraz długość krawędzi bocznej ostrosłupa, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie WSD :

$$|WS|^2 + |SD|^2 = |DW|^2$$

$$8^2 + 6^2 = |DW|^2$$

$$100 = |DW|^2$$

$$|DW| = 10$$

Łatwo zauważyć, że trójkąty WSD oraz SOD są **trójkątami podobnymi**. Istotnie oba są trójkątami prostokątnymi o tym samym kącie ostrym α . Wykorzystując tę własność trójkątów możemy ułożyć proporcję, dzięki której obliczymy długość odcinka SO :

$$\frac{|WS|}{|DW|} = \frac{|SO|}{|SD|}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{|SO|}{6}$$

$$|SO| = 4,8$$

Długość odcinka SO jako odcinka łączącego pod kątem prostym spodek wysokości ostrosłupa z jego krawędzią boczną stanowi szukaną odległość, zatem $|SO| = 4,8$ jest ostateczną odpowiedzią do zadania.

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym

wielokąt foremny

wielokąt, którego wszystkie boki są równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne są równej miary

postać iloczynowa funkcji kwadratowej

postać, z której można odczytać bezpośrednio miejsca zerowe funkcji kwadratowej x_1 oraz x_2 . Jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 , to jej wzór można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

trójkąty prostokątne podobne

trójkąty, które mają kąty parami równe i boki parami proporcjonalne.

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją 3D. Prezentuje ona zadania, w których celem jest wyznaczenie długości wskazanych odcinków w ostrosłupie. Obserwuj, jak nazywać poszczególne odcinki. Zwróć uwagę na dobór trójkątów prostokątnych w ostrosłupach, które pozwalają obliczyć długości poszczególnych odcinków ostrosłupa. Po zapoznaniu się z materiałem, spróbuj rozwiązać ćwiczenia problemowe umieszczone pod animacją.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2y9iOe4G>

Film nawiązujący do treści materiału dotycząca długości odcinków w ostrosłupie.

Polecenie 2

W zadaniu pierwszym autor wyznaczył długość wysokości ściany bocznej opuszczonej na krawędź podstawy i długość wysokości pewnego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Wyznacz w tym samym ostrosłupie wysokość ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa. W jakiej relacji pozostają ze sobą wszystkie trzy wymienione wysokości?

Polecenie 3

W ostatnim pytaniu animacji 3D należało obliczyć wysokość ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa. Dzięki temu odcinkowi można wyznaczyć kąt dwuścienny zawarty między ścianami bocznymi ostrosłupa (co zostało napisane na czerwono w rozwiązaniu zawartym w animacji). Oblicz miarę tego kąta w danym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



W ostrosłupie prawidłowym 18-kątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 70^\circ$. Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej następujące wymiary ostrosłupa:

h - wysokość ostrosłupa



b - krawędź boczna ostrosłupa



r - promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa



a - krawędź podstawy ostrosłupa



Ćwiczenie 3



Czworościanem foremnym nazywamy ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie krawędzie są takiej samej długości. Łącząc ze sobą środki ciężkości sąsiednich ścian czworościanu foremnego o krawędzi długości a otrzymamy czworościan foremny o krawędzi długości:

☐ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

☐ $\frac{a}{4}$

☐ $\frac{a}{3}$

☐ $\frac{a}{2}$

Ćwiczenie 4



Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 96. Krawędź boczna jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi

☐ Wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{34}$

☐ Wysokość ściany bocznej ma długość $3\sqrt{35}$

☐ Przekątna podstawy jest równa $6\sqrt{2}$

☐ Promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 3

Ćwiczenie 5



Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 18 i 24. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 6



Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 10 i podstawie długości 16. Trójkąt ten jest podstawą ostrosłupa, a środek ciężkości trójkąta jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Oblicz wysokość ostrosłupa wiedząc, że jego najkrótsza krawędź boczna ma długość 8.

Ćwiczenie 7



Siatką ostrosłupa jest kwadrat o boku 10. Oblicz długości wszystkich wysokości tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 8



W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym długość krawędzi bocznej jest równa długości krawędzi podstawy. Pole ściany bocznej tego ostrosłupa jest równe $288\sqrt{3}$. Oblicz odległość środka wysokości ostrosłupa od ściany bocznej bryły.

Dla nauczyciela

Autor: Bożena Koprowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długości odcinków w ostrosłupach

Grupa docelowa: III etap edukacyjny: liceum ogólnokształcące, technikum. Zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza długości wskazanych odcinków w ostrosłupach,
- potrafi wyszukiwać w ostrosłupie trójkąty prostokątne umożliwiające obliczenie długości wskazanych odcinków,
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pokaz,
- metoda problemowa,
- dyskusja,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- modele ostrosłupów,
- komputer z głośnikami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/tablica interaktywna.

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przypomina z uczniami podstawowe elementy ostrosłupa i nazewnictwo związane z ostrosłupami typu: czworościan, ostrosłup prawidłowy.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna lekcję od zapoznania się z pierwszym przykładem rozwiązany w animacji w części „Animacja 3D”. Wspólnie omawiają strategię rozwiązania i najważniejsze etapy pracy w tym ćwiczeniu.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Każda grupa stara się ustalić strategię pozwalającą rozwiązać Polecenie 2.
3. Metodą burzy mózgów uczniowie ustalają strategię rozwiązania zadania i zapisują ją w zeszytach. Następnie na forum klasy porównują swoje metody pracy. Ustalają, która z metod była najwygodniejsza rachunkowo i najbardziej efektywna.
4. Nauczyciel zapoznaje uczniów z trzecim przykładem z części „Przeczytaj”. Tym razem wspólnie z uczniami przypomina metodę rozwiązywania zadań optymalizacyjnych. Następnie uczniowie w grupach rozwiązują wskazany problem.
5. Nauczyciel omawia z uczniami wykres funkcji pola przekroju ostrosłupa. Dzięki apletowi umieszczonemu w części „Przeczytaj” pokazuje, dlaczego wystarczy obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli, by wskazać najkorzystniejszy dobór wymiarów ostrosłupa.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel w dyskusji z uczniami ustala, czym charakteryzuje się dobra strategia rozwiązania zadania matematycznego.
2. Nauczyciel przypomina uczniom czym jest środek ciężkości figury i jakie ma własności.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom rozwiązanie czterech pierwszych ćwiczeń z części „Sprawdź się”. Zadania są testowe, ale badają umiejętność tworzenia efektywnej strategii rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Materiały pomocnicze:

[Ostrosłup i jego własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Można wykorzystać animację 3D do lekcji powtórzeniowej, podczas której nauczyciel będzie wskazywał zagadnienia najczęściej występujące na egzaminie maturalnym. Wówczas po zapoznaniu się z animacją należy przejść do samodzielnej pracy ucznia na przykładowych zadaniach maturalnych ze stereometrii.