



Równania wielomianowe

Szczególne przypadki rozwiązań równań wielomianowych. Rozwiązywanie równań, w których jedna ze stron jest iloczynem wielomianów, a druga strona jest równa 0.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Wskazywanie liczby rozwiązań. Wskazywanie rozwiązań do danego równania wielomianowego. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Podawanie liczby rozwiązań. podawanie rozwiązań. Równania z parametrem. Zasób zawiera zadania, w tym zadania interaktywne.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Zadania o większym stopniu trudności. Zasób zawiera zadania otwarte z wyjaśnieniami i rozwiązaniami. Zadania na dowodzenie.

Równania wielomianowe

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji W sprowadza się najczęściej do rozwiązania równania $W(x) = 0$. Jeżeli W jest wielomianem stopnia pierwszego, to otrzymujemy równanie liniowe. Jeżeli W jest wielomianem stopnia drugiego, to otrzymujemy równanie kwadratowe.

Teraz dowiesz się, jak rozwiązywać niektóre z równań, w których występuje wielomian stopnia wyższego niż dwa. Nie jest to zadanie łatwe. Dla dowolnych wielomianów stopnia piątego lub wyższego takie metody w ogóle nie istnieją. Pokażemy więc, jak możesz sobie poradzić w pewnych szczególnych przypadkach.

Przykład 1

Rozwiążemy równania:

- $x^3 + 64 = 0.$

Odejmujemy od obu stron równania liczbę 64 i otrzymujemy równanie $x^3 = -64$.

Jedyną liczbą spełniającą to równanie jest $x = \sqrt[3]{-64} = -4$.

- $2x^4 - 162 = 0$

$$2x^4 = 162$$

$$x^4 = 81.$$

Jedyną dodatnią liczbą, która spełnia to równanie, jest $x = \sqrt[4]{81} = 3$, co wynika z definicji pierwiastka. Zauważmy, że jeżeli wykładnik k potęgi x^k jest parzysty, to $x^k = (-x)^k$, co oznacza, że jeśli liczba 3 jest rozwiązaniem równania $x^4 = 81$, to również liczba (-3) jest rozwiązaniem tego równania, bo $(-3)^4 = 3^4 = 81$. Równanie ma zatem dwa rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -3$.

- $x^6 + 64 = 0$. Zauważmy, że to równanie jest sprzeczne, gdyż lewa strona tego równania jest sumą nieujemnej liczby x^6 oraz 64. Jest więc nie mniejsza niż 64 dla dowolnej liczby x . Nie może więc równać się 0.

Twierdzenie: Rozwiązanie równania $x^n = a$

Dla liczby naturalnej dodatniej n , większej od 1, oraz liczby rzeczywistej $a \neq 0$ równanie $x^n = a$ ma

- jedno rozwiązanie równe $x = \sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą nieparzystą,

- dwa rozwiązania równe $x = \sqrt[n]{a}$ oraz $x = -\sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą dodatnią,
- zero rozwiązań, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą ujemną.

Przykład 2

Udowodnij, że równanie $-x^4 - x^2 - 5 = 0$ jest równaniem sprzecznym.

Zauważmy, że lewa strona równania jest sumą niedodatniej liczby $-x^4$, niedodatniej liczby $-x^2$ oraz ujemnej liczby (-5) , więc jest liczbą ujemną. Nie może więc być równa 0.

Przejdziemy teraz do rozwiązywania równań, których jedna ze stron jest iloczynem wielomianów, a druga strona jest równa 0. Będziemy tu korzystać z faktu, że iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy 0.

Przykład 3

Rozwiążemy równania

- $x(x - 4)(x + 2) = 0$.

Lewa strona równania jest iloczynem trzech czynników. Jeśli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z czynników jest równy zero, czyli $x = 0$ lub $x - 4 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Stąd wynika, że równanie ma trzy rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oraz $x_3 = -2$.

- $(x^2 - 16)(2x^2 + 9x - 5)(x^4 + 4) = 0$.

W tym równaniu także lewa strona jest iloczynem trzech czynników, a prawa strona jest równa zero. Tak jak poprzednio wnioskujemy, że co najmniej jeden z czynników musi być równy zero, czyli $x^2 - 16 = 0$ lub $2x^2 + 9x - 5 = 0$ lub $x^4 + 4 = 0$. Rozwiązujemy kolejno otrzymane równania.

$x^2 - 16 = 0$ przekształcamy równoważnie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, do równania

$$(x - 4)(x + 4) = 0.$$

Stąd $x - 4 = 0$ lub $x + 4 = 0$. Otrzymujemy więc dwa rozwiązania $x_1 = 4$ oraz $x_2 = -4$.

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

jest równaniem kwadratowym, którego $\Delta = 121$. Równanie to ma więc dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-9 - 11}{4} = -5$$

oraz

$$x_2 = \frac{-9 + 11}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^4 + 4 = 0$$

zgodnie z podanym wcześniej twierdzeniem, nie ma rozwiązań.

Zatem rozpatrywane równanie ma cztery rozwiązania $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = -5$ oraz $x_4 = \frac{1}{2}$.

Teraz pokażemy, jak niektóre równania doprowadzić do takiej postaci, jaką miały równania omawiane w poprzednim przykładzie.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^3 + x^2 - 6x = 0$.

Wyłączając x przed nawias, otrzymujemy równanie

$$x(x^2 + x - 6) = 0,$$

którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Zatem co najmniej jeden z tych czynników jest równy zero, czyli $x = 0$ lub $x^2 + x - 6 = 0$.

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 25.$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie to ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ oraz $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$. Rozwiązane równanie ma więc trzy rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ oraz $x_3 = 2$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0.$$

Zauważmy, że lewą stronę możemy zapisać, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, w następujący sposób

$$(x^2 - 4)^2 = 0.$$

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, otrzymujemy kolejno

$$[(x - 2)(x + 2)]^2 = 0$$

$$(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że $(x - 2)^2 = 0$ lub $(x + 2)^2 = 0$, czyli $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$.

Zatem $x = 2$ lub $x = -2$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$x^4 - x^3 - 8x + 8 = 0.$$

Żeby rozwiązać to równanie, pogrupujemy wyrazy. W tym celu wyłączmy przed nawias x^3 z dwóch pierwszych wyrazów oraz -8 z dwóch ostatnich. W ten sposób otrzymamy równanie równoważne

$$x^3(x - 1) - 8(x - 1) = 0,$$

w którym lewa strona jest różnicą dwóch iloczynów. W każdym z tych iloczynów występuje wspólny czynnik $(x - 1)$. Gdy wyłączymy go przed nawias, otrzymamy równanie

$$(x - 1)(x^3 - 8) = 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie, którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Stąd otrzymujemy $x_1 - 1 = 0$ lub $x^3 - 8 = 0$. Pierwsze równanie spełnia jedynie liczba $x_1 = 1$. Drugie równanie przekształcimy do postaci $x^3 = 8$. Jediną liczbą, która spełnia to równanie, jest $x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ostatecznie otrzymaliśmy dwa rozwiązania $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$ rozwiązywanego równania.

Ćwiczenie 1



Połącz w pary - każde z wyrażeń z odpowiadającą mu postacią iloczynową.

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$(x + 1)^2(x - 2)$$

$$x^2 - 1$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$x^3 - 3x - 2$$

$$(x - 1)(x + 1)$$

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$(x - 1)^2(x - 3)$$

$$3x^4 - 3$$

$$3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$(x - 1)^2(x - 2)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Dane są wielomiany:

$$W(x) = x^2 - 3x$$

$$P(x) = x^3 + 5x^2$$

$$Q(x) = x^4 + 3x^2$$

$$R(x) = 5x.$$

Połącz w pary działania na wielomianach z odpowiadającymi im wynikami.

$$-x^4 - 2x^2 - 3x$$

$$W(x) + R(x)$$

$$x^2 + 2x$$

$$P(x) \cdot R(x)$$

$$x^3 + 6x^2 - 3x$$

$$P(x) - Q(x)$$

$$5x^4 + 25x^3$$

$$W(x) \cdot R(x)$$

$$-x^4 + x^3 + 2x^2$$

$$W(x) + P(x)$$

$$5x^3 - 15x^2$$

$$W(x) - Q(x)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Połącz w pary wielomian z jego stopniem.

3

$$x^3(x-2)(x-3)^2$$

9

$$(x+4)^2(x-4)^2$$

7

$$(2x-1)^8(x+2)$$

6

$$(x-1)(x+2)(x+3)$$

8

$$2x(x+2)^3(x+5)$$

5

$$(x^2+5)(x^2+4)^3$$

2

$$2(x+2)(x-3)$$

4

$$x(x^2+3)^3$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Korzystając ze wzoru, uzupełnij zdania, przeciągając w luki wartości odpowiadające danym argumentom lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Dla $x = 1$ wartość wielomianu wynosi .
- Dla $x = -1$ wartość wielomianu wynosi .
- Dla $x = 2$ wartość wielomianu wynosi .
- Dla $x = -2$ wartość wielomianu wynosi .
- Dla $x = 0$ wartość tego wielomianu wynosi .
- Dla $x = 5$ wartość tego wielomianu wynosi .

1

49

4

-26

1300

1900

-23

1217

-2

1216

48

6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Dane są wielomiany $W(x) = (x - 3)(x + 1)$, $V(x) = (x - 3)(x - 1)$. Ile rozwiązań ma równanie $W(x) \cdot V(x) = 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 2 rozwiązania

☐ 3 rozwiązania

☐ 4 rozwiązania

☐ 1 rozwiązanie

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawne dokończenie zdania. Liczby x_1 , x_2 , x_3 są rozwiązaniami równania $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$. Jeżeli $x_1 < x_2 < x_3$, to:

☐ $x_1 = x_2 + x_3$

☐ $2x_1 + x_2 = -4$

☐ $x_3 = x_1 + x_2$

☐ $x_1 \cdot x_2 < x_3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Które równanie ma dwa różne rozwiązania całkowite? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$

☐ $x(x - 3)(2x + 1) = 0$

☐ $x^4 - 2 = 0$

☐ $x(x^2 - 4) = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawne dokończenie zdania. Liczby -1 i 3 są jedynymi rozwiązaniami równania:

☐ $(x^2 - 2x - 3)(x - 3) = 0$

☐ $(x^2 - 2x + 1)(x - 3)^2 = 0$

☐ $2x(x^2 - 2x - 3) = 0$

☐ $5(x - 1)(x + 3) = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zaznacz poprawne dokończenie zdania. Równanie $x^5 - 9 = 9x^3 - x^2$ ma dokładnie:

☐ trzy rozwiązania $x = -3, x = -1, x = 3$

☐ jedno rozwiązanie $x = 1$

☐ cztery rozwiązania $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$

☐ dwa rozwiązania $x = 1, x = 9$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



W jakiej postaci można zapisać wielomian $W(x) = x(x - 1)(x - 3) - (3 - x)$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $W(x) = (x - 3)(x^2 - x - 1)$

☐ $W(x) = (x - 3)(x^2 - x + 1)$

☐ $W(x) = x(x - 1)(x - 3)(3 - x)$

☐ $W(x) = (3 - x)(x - 1)^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Która postać jest równoważna równaniu $3x^4 - x^2 = 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)x^2 = 0$

☐ $x^2(3x - 1)^2 = 0$

☐ $x^2(3x - 1)(3x + 1) = 0$

☐ $x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1) = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Która postać jest równoważna równaniu $-4x^4 - 6x^3 + 18x^2 = 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $-2x^2(2x - 3)(x + 3) = 0$

☐ $-2x^2(2x - 3)(x - 3) = 0$

☐ $2x^2(2x + 3)(x - 3) = 0$

☐ $2x^2(2x - 3)(x + 3) = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Ile rozwiązań ma równanie $x^2(2x^2 - 7)(x^2 + 16) = 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 5 rozwiązań

☐ 2 rozwiązania

☐ 3 rozwiązania

☐ 4 rozwiązania

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Rozwiąż równania. Przeciągnij w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

• $2x^3 - 432 = 0$

Odpowiedź: $x =$

• $\frac{5x^3}{2} + 160 = 0$

Odpowiedź: $x =$

9

-5

6

5

-2

-6

-4

3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Rozwiąż równania. Przeciągnij w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej. Liczby należy wstawić w kolejności malejącej.

• $3x^4 - 48 = 0$

Odpowiedź: $x =$ lub $x =$

• $x^6 - 27 = 0$

Odpowiedź: $x =$ lub $x =$

• $5x^8 + 20 = 0$

Odpowiedź: $x =$

$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	brak rozwiązań	$-\sqrt{2}$	3	-3	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	4	-4
-2	2									

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Rozwiąż równania. Uzupełnij zdania, przeciągając w luki poprawne rozwiązanie lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. Rozwiązaniem równania $7x^2(x+3)^2(3x-1) = 0$ są liczby .

2. Rozwiązaniem równania $(4x^2 + 4x + 1)(x^2 + 10) = 0$ jest liczba .

3. Rozwiązaniem równania $(16x^2 - 9)(25x^4 - 1) = 0$ są liczby .

$x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = -\frac{2}{4}, x_3 = \frac{\sqrt{5}}{4}, x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{5}$
$x = -\frac{1}{2}$	$x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = \frac{1}{3}$	$x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{3}{4}, x_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}, x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Oblicz taką wartość m , dla której równanie $(x - 3)(3x + m) = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Tylko jedno rozwiązanie jest dla wartości $m =$

- 6
- 8
- 8
- 9
- 6
- 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Ile rozwiązań ma równanie $(x^4 - 16)(x^2 + 3x - 10) = 0$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 1 rozwiązanie

☐ 4 rozwiązania

☐ 3 rozwiązania

☐ 2 rozwiązania

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Rozwiąż równania. Uzupełnij zdania, przeciągając w luki poprawne rozwiązanie lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. Rozwiązaniem równania $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$ są liczby .

2. Rozwiązaniem równania $2x^3 - x^2 - x = 0$ są liczby .

3. Rozwiązaniem równania $x^4 - 5x^3 + 7x^2 = 0$ jest liczba .

- $x = 1$
- $x = 0$
- $x = 0, x = 3$ lub $x = -\frac{1}{3}$
- $x = 0, x = 1$ lub $x = -\frac{1}{2}$
- $x = 0$ lub $x = 4$
- $x = 2$ lub $x = 6$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Rozwiąż równania. Uzupełnij zdania, przeciągając w luki poprawne rozwiązanie lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1. Rozwiązaniem równania $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ są liczby
2. Rozwiązaniem równania $x^4 + 6x^3 + x^2 + 6x = 0$ są liczby
3. Rozwiązaniem równania $3x^3 + 4x^2 - 6x - 8 = 0$ są liczby
4. Rozwiązaniem równania $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ są liczby

$$x = -\frac{4}{5}, x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

$$x = -2, x = 1 \text{ lub } x = -1$$

$$x = -6 \text{ lub } x = 0$$

$$x = -\frac{4}{3}, x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

$$x = 3, x = 2 \text{ lub } x = -2$$

$$x = 5, x = 3 \text{ lub } x = -2$$

$$x = -6 \text{ lub } x = 1$$

$$x = -4, x = 1 \text{ lub } x = -2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Uzasadnij, że iloczyn pierwiastków równania $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ jest dodatni.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Uzasadnij, że suma rozwiązań równania $x^{50} + x^2 = 50x^{48} + 50$ jest liczbą całkowitą.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Przez jaki wielomian trzeba pomnożyć wielomian $W(x) = x^2 - 4$, żeby otrzymać wielomian $V(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 8$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $P(x) = x^2 - 2$

☐ $P(x) = x - 4$

☐ $P(x) = x^4 - 4$

☐ $P(x) = x^3 - 2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Udowodnij, że jeżeli liczba 2 jest rozwiązaniem równania

$(x - 2)^2(x + 7) - x(x^2 - ax + a) = 0$, to równanie to nie ma więcej rozwiązań.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.