Własności podobieństwa

Twierdzenie: Własności podobieństwa.Twierdzenie: o linii środkowej trójkąta. Zadania na wykorzystanie cech podobieństwa trójkątów. Stosunek obwodów trójkątów podobnych. Skala podobieństwa. Stosunek pól figur podobnych. Obliczanie długości odcinków, pola powierzchni lub stosunku długości odcinków w figurach podobnych. Prezentacja interaktywna: linia środkowa trójkąta. Prezentacja interaktywna: linia środkowa w trapezie. 36 zadań, w tym zadania interaktywne.

Własności podobieństwa

Twierdzenie: Własności podobieństwa

Jeżeli trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC w skali podobieństwa k, to stosunek obwodów tych trójkątów jest równy skali podobieństwa, a stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa

$$\frac{L_{A'B'C'}}{L_{ABC}} = k$$

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k^2.$$

Rozważmy trójkąty prostokątne $A'B'C'$ oraz ABC podobne w skali k. Wysokości tych trójkątów zaznaczone na rysunku są równe odpowiednio h' i h.

Zauważmy, że skoro trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC, to

$$\frac{|C'A'|}{|CA|} = k$$

oraz

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle A'C'D'|, \ |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C'D'A'| = 90°.$$

Stąd

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle C'A'D'| = 90° - |\sphericalangle A'C'D'|.$$

Na mocy cechy podobieństwa *kąt* - bok - *kąt* trójkąt $A'C'D'$ jest podobny do trójkąta ACD i skala podobieństwa wynosi k. Stąd

$$\frac{h'}{h} = k,$$

czyli stosunek długości wysokości w trójkątach podobnych jest taki sam jak stosunek długości boków.

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}c'h' = \frac{1}{2}kc \cdot kh = \frac{1}{2}ch \cdot k^2 = P_{ABC} \cdot k^2$$

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k^2$$

Stosunek pól trójkątów podobnych jest więc równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$L_{A'B'C'} = a' + b' + c' = ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot L_{ABC}$$

$$\frac{L_{A'B'C'}}{L_{ABC}} = k$$

Stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy skali podobieństwa.

Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Zaznaczmy w nim środki dwóch boków i połączmy je odcinkiem. Taki odcinek nazywamy linią środkową trójkąta.

Zauważmy, że trójkąty DCE i ABC są podobne na mocy cechy bok - kąt - bok. Kąt DCE jest wspólny dla obu trójkątów oraz

$$\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|EC|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Z definicji podobieństwa wynika, że $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{1}{2}$. Mamy też równość kątów

$$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CAB|, \ |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CBA|.$$

Ponieważ punkty C, D, A są współliniowe, więc kąty CDE i CAB są odpowiadające. Stąd wynika równoległość DE i AB.

> **Twierdzenie: o linii środkowej trójkąta**
>
> Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i jest od niego dwa razy krótszy.

Podstawy trapezu ABCD mają długości a oraz b. Punkt E jest środkiem boku AD, a punkt F jest środkiem boku CB. Odcinek łączący środki ramion trapezu nazywamy linią środkową w trapezie. Obliczymy jego długość.

Poprowadźmy przekątną AC i oznaczmy przez G jej środek.

Odcinek EG jest odcinkiem łączącym środki boków w trójkącie ADC. Stąd EG jest równoległy do podstawy trapezu DC oraz

$$|EG| = \frac{1}{2}a.$$

Podobnie odcinek GF jest odcinkiem łączącym środki boków trójkąta ABC, czyli jest równoległy do podstawy trapezu AB oraz

$$|GF| = \frac{1}{2}b.$$

Ponieważ oba odcinki EG i GF są równoległe do podstaw trapezu, więc punkty E, G, F leżą na jednej prostej.

Mamy

$$|EF| = |EG| + |GF| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}.$$

Stąd twierdzenie:

> **Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie**
>
> Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu.

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Punkty *K*, *L* i *M* dzielą ramię AC trójkąta ABC na odcinki równej długości. Punkty *N*, *O* i *P* wybrano na boku BC tak, że odcinki MN, LO i KP są równoległe do podstawy AB (patrz rysunek). Długość odcinka MN jest równa 2.

Wtedy

- "|"
- KP = 8
- P CMN P ABC = 1 16

Ćwiczenie 3

W trapezie ABCD podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD. Ramiona AD i BC mają długości AD=10, BC=12. Proste zawierające te ramiona przecinają się w punkcie S i SD=15. Wówczas

- Trójkąt SDC jest podobny do trójkąta SAB w skali 3 5 .
- Długość odcinka SC jest równa 18 .
- P SAB P SDC = 9 25

Ćwiczenie 4

a. W trapezie ABCD podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli każdą z nich w stosunku 2:3. Krótsza podstawa trapezu ma długość 5. Oblicz długość drugiej podstawy.
b. W trapezie ABCD podstawy mają długości |AB|=9 i |CD|=3. Przekątna BD ma długość 8. Na jakie odcinki dzieli tę przekątną prosta AC?
c. W trapezie ABCD podstawy mają długości |AB|=8 i |CD|=2. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Trójkąt SAB ma pole równe 10. Oblicz pole trójkąta SCD.

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 3 i 6 . Wtedy wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 i 2 5 .
- W trójkącie prostokątnym ABC stosunek długości przyprostokątnych AB i AC jest równy 15:8. Poprowadzono wysokość AD . Pole trójkąta ACD jest równe 16 . Wtedy pole trójkąta ABC jest równe 72,25 .
- W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa ab a 2 + b 2 .

Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- Odcinki AD = 6 i BE = 7 są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC , którego bok BC ma długość 8 . Wtedy, AC = 28 3 .
- Trójkąt ABC jest równoramienny o ramionach długości 25 i podstawie długości 30 . Wtedy wysokości w tym trójkącie są równe 20 i 24 .

Ćwiczenie 7

a. W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $AB=4$ i $AC=7$ wpisano kwadrat, tak jak na rysunku. Oblicz długość boku tego kwadratu.

b. W trójkąt ABC o podstawie $AB=40$ i wysokości równej 16 opuszczonej z wierzchołka C na tę podstawę wpisano prostokąt, tak jak na rysunku. Długości odcinków EF i DE pozostają w stosunku $2:5$. Znajdź długości boków prostokąta $DEFG$.

c. W trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt ACB jest prosty, wpisano kwadrat $DEGF$ o boku długości 4. Bok GF kwadratu leży na przeciwprostokątnej AB trójkąta. Wierzchołki E, D leżą odpowiednio na przyprostokątnych AC i CB. Odcinek AG jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ABC.

Ćwiczenie 8

Odpowiedz na pytania.

a. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 28, a długości ramion trapezu AD i BC są odpowiednio równe 20 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.

b. Dwa trójkąty podobne ABC i BDE umieszczono obok siebie (patrz rysunek) tak, że punkty A, B i D leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami odcinków AB, BD i CE. Udowodnij, że trójkąt KLM jest podobny do każdego z trójkątów ABC i BDE.

c. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie S i zachodzi równość $AS\cdot DS=BS\cdot CS$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Ćwiczenie 9

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- Stosunek długości przekątnych dwóch prostokątów podobnych jest równy $4:7$. Wówczas stosunek pól tych prostokątów jest równy $4:7$.
- Stosunek pól dwóch trójkątów podobnych wynosi $144:225$. Wówczas stosunek obwodów tych trójkątów jest równy $12:15$.
- W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE równoległy do podstawy AB , który ramię CB podzielił w stosunku $1:4$, licząc od wierzchołka C . Wówczas pole trójkąta DEC stanowi $1\ 16$ pola trójkąta ABC .

Ćwiczenie 10

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- Ramiona trapezu mają długości 3 i 5 , a obwód trapezu jest równy 20 . Wtedy długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu jest równa 12 .
- Wysokość trapezu jest równa 4 , a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 5 . Wtedy pole tego trapezu jest równe 20 .
- W trapezie o podstawach długości a i b (gdzie $b > a$) odcinek łączący środki przekątnych ma długość $b - a\ 2$.

Ćwiczenie 11

Odcinki DE i BC są równoległe oraz $DB=8$, $DE=12$, $BC=16$.

Wówczas długość odcinka AD jest równa

- 4
- 8
- 12
- 24

Ćwiczenie 12

Prosta równoległa do boku AB trójkąta ABC odcina z niego trójkąt, którego pole stanowi 14 pola trójkąta ABC. Wynika stąd, że ta prosta dzieli boki AC i BC w stosunku

- 1 : 1
- 1 : 2
- 1 : 3
- 1 : 4

Ćwiczenie 13

W prostokącie $ABCD$ o bokach długości 6 i 8 odległość wierzchołka D od przekątnej AC jest równa

- 7,5
- 4,8
- 40 3
- 4 3

Ćwiczenie 14

W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych. Wówczas stosunek $DSDB$ jest równy

- 1 2
- 1 3
- 2 3
- 2 3

Ćwiczenie 15

Drzewo rzuca cień długości 12 m. W tym samym czasie stojący obok człowiek o wzroście 180 cm rzuca cień długości 120 cm. Drzewo ma wysokość

- 8 m
- 9 m
- 12 m
- 18 m

Ćwiczenie 16

Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8. Krótsza podstawa ma długość 2. Wtedy długość dłuższej podstawy jest równa

- 6
- 10
- 14
- 16

Ćwiczenie 17

W trójkąt równoboczny o boku długości 4 wpisano kwadrat, w taki sposób, że jego dwa wierzchołki leżą na jednym z boków trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki leżą na pozostałych dwóch ramionach trójkąta.

Długość boku kwadratu jest równa

- $8\ 3 - 12$
- $4\ 3 - 6$
- $3\ 2$
- $2\ 3$

Ćwiczenie 18

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 i ramionach długości 13. Wysokość opuszczona na ramię tego trójkąta jest równa

- $156\ 5$
- $156\ 10$
- $60\ 13$
- $120\ 13$

Ćwiczenie 19

Trójkąt ABC ma boki długości 3,5,7. W trójkącie $A'B'C'$,podobnym do trójkąta ABC, najkrótszy bok ma długość 412. Obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy

- 10
- $22\ 1\ 2$
- $33\ 3\ 4$
- 40

Ćwiczenie 20

Suma obwodów dwóch trójkątów podobnych jest równa 20. Stosunek pól tych trójkątów jest równy $16:1$. Obwody tych trójkątów są równe

- 8 i 12
- 6 i 14
- 2 i 18
- 4 i 16

Ćwiczenie 21

W trójkącie ABC długości boków są równe $AC=6$, $BC=9$ oraz $AB=12$. Na bokach AC i BC wybrano punkty D i E, które podzieliły te boki w stosunku $1:2$, licząc od wierzchołka C. Oblicz obwód trójkąta DEC.

Ćwiczenie 22

Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC i dzielą go w stosunku $1:2:3$, licząc od wierzchołka C. Przez punkty D i E poprowadzono proste równoległe do boku AB. Oblicz, w jakim stosunku pozostają pola figur, na jakie te proste podzieliły trójkąt ABC.

Ćwiczenie 23

W trapezie $ABCD$ o podstawach długości $AB=18$ i $CD=6$ przedłużono ramiona do punktu S ich przecięcia. Długości odcinków DS i CS są równe $DS=3$ i $CS=5.$ Oblicz długości ramion trapezu $ABCD$.

Ćwiczenie 24

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C tego trójkąta. Wykaż, że $CD=AD\cdot BD$.

Ćwiczenie 25

W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 10. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S, który dzieli każdą z nich w stosunku $3:5$. Oblicz długość krótszej podstawy.

Ćwiczenie 26

W trójkącie ABC podstawa AB ma długość $24,$ a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 9. W trójkąt ten wpisano prostokąt $DEFG$, taki jak na rysunku. Boki tego prostokąta pozostają w stosunku $3:4$, przy czym dłuższy bok leży na podstawie trójkąta ABC. Oblicz pole wpisanego prostokąta.

Ćwiczenie 27

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt ACB jest prosty oraz $AC=5$ i $BC=12$, zbudowano kwadrat $ACDE$. Punkt H należy do prostej AB i $\sphericalangle HEA=90°$. Oblicz pole trójkąta HAE.

Ćwiczenie 28

Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC poza punkt C, wybrano punkt P, taki że $AC=3CP$. Znajdź stosunek pola trójkąta DCP do pola równoległoboku $ABCD$.

Ćwiczenie 29

W trójkącie ABC środkowa CD ma długość 8. Punkt K leży na środkowej CD i $|CK|=2$. Na boku AC leży taki punkt M, że proste MK i BC są równoległe. Oblicz $|AM|:MC.$

Ćwiczenie 30

W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest ostry. Na boku AB leży taki punkt E, że proste DE i AB są prostopadłe. Przekątna AC przecina odcinek DE w punkcie F, przy czym $|DF|=13$ i $|FE|=12$. Oblicz pole tego rombu.

Ćwiczenie 31

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC|=13{,}6$ i $|BC|=25{,}5$. Punkt D leży na przeciwprostokątnej AB i $|AD|=8{,}5$. Na przyprostokątnej AC leży taki punkt E, że proste DE i AC są prostopadłe. Na przyprostokątnej BC leży taki punkt F, że proste DF i BC są prostopadłe. Oblicz pole czworokąta $DFCE$.

Ćwiczenie 32

W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków $|AB|=12$ i $|BC|=16$. Punkt E leży na boku AB i $|AE|=8$. Punkt F leży na boku BC i $|CF|=4$. Proste DE i DF przecinają przekątną AC w punktach odpowiednio K i L. Wykaż, że $|AK|=2\,|LC|$.

Ćwiczenie 33

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę większą od kąta przy wierzchołku B. Punkt K jest środkiem boku AB. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta, poprowadzona z wierzchołka C, przecina bok AB w punkcie D, przy czym $|AD|:|DB|=5:11$. Symetralna boku AB przecina bok BC w punkcie L i przedłużenie boku AC w punkcie M. Oblicz.

a. $|BL|:|LC|$
b. $|AC|:|CM|$
c. $|KL|:|LM|$

Ćwiczenie 34

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB|=20$, $|CD|=5$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Prosta równoległa do podstawy AB i przechodząca przez punkt S przecina ramiona AD i BC w punktach odpowiednio K i L. Oblicz długość odcinka KL.

Ćwiczenie 35

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AC|=8$, $|BC|=12$ i $|AB|=10$. Na bokach AB, BC i CA wybrano odpowiednio takie punkty D, E i F, że czworokąt $CFDE$ jest rombem. Oblicz długość boku tego rombu oraz długości odcinków DB i DA.

Ćwiczenie 36

Na bokach AB, BC i AC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D, E i F, że prosta DE jest równoległa do boku AC i prosta DF jest równoległa do boku BC. Pole trójkąta ADF jest równe 18, a pole trójkąta BDE jest równe 50. Oblicz pole trójkąta ABC.