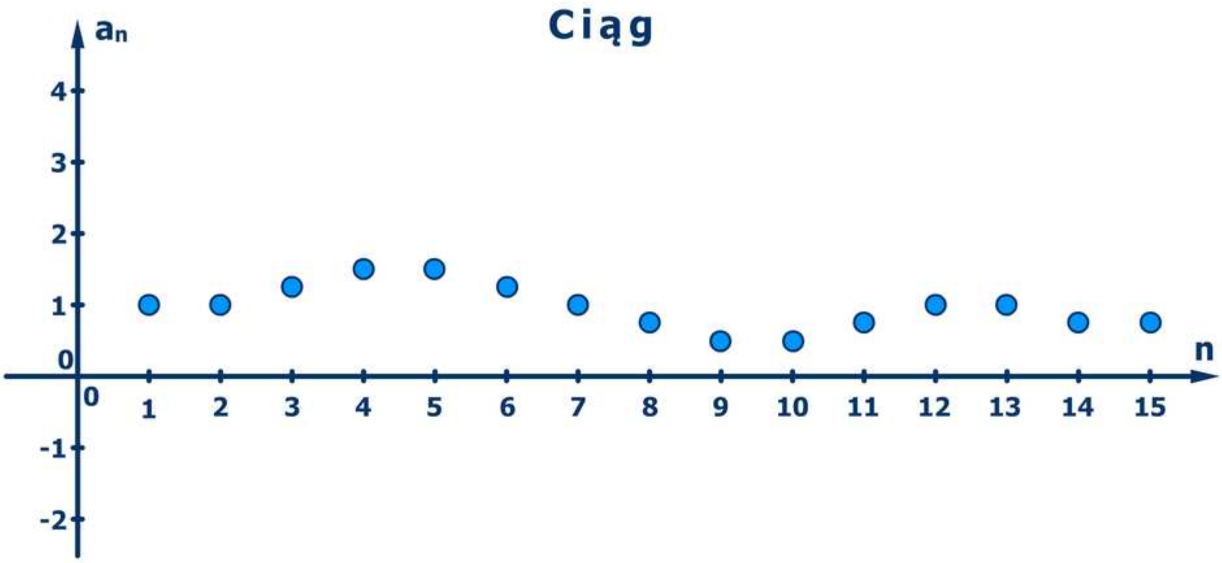
Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

W tym materiale zawarte są informacje na temat ciągów. Poznasz definicję oraz różne sposoby opisywania ciągu liczbowego. Dowiesz się, co to są wyrazy ciągu i w jaki sposób je obliczamy. Sprawdzisz swoją wiedzę analizując przykłady i rozwiązując ćwiczenia.

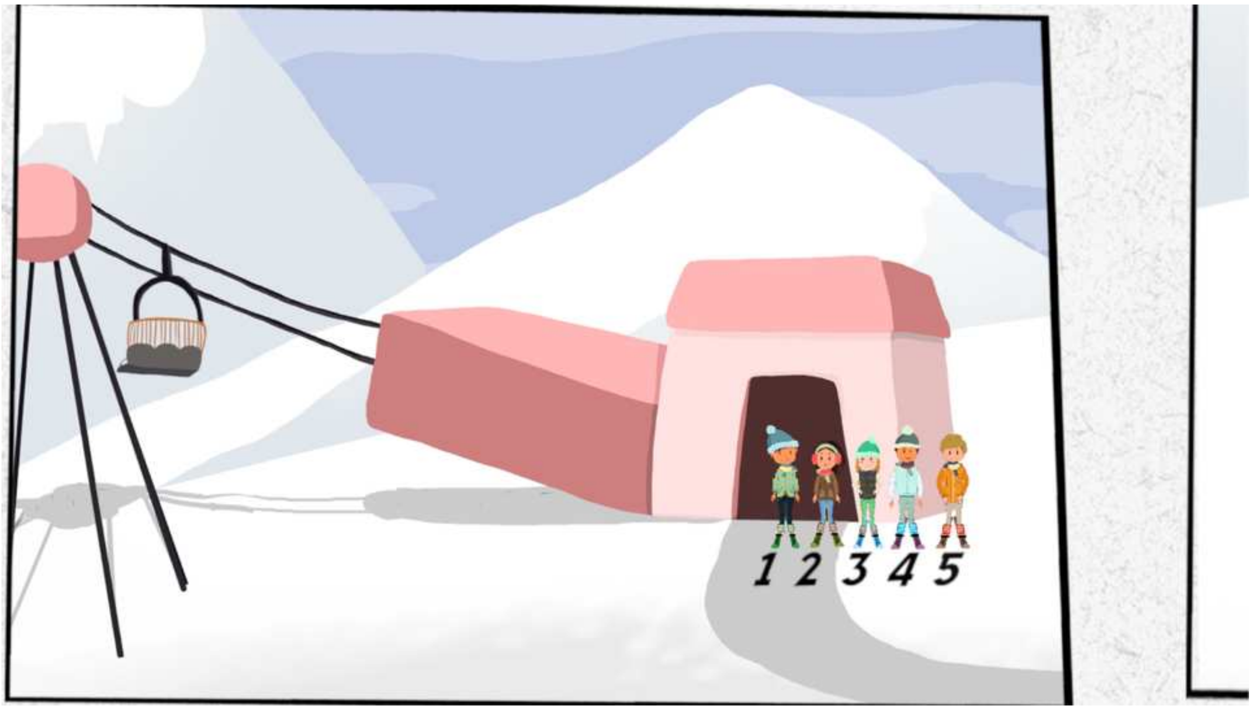


Film dostępny pod adresem /preview/resource/RSm5Q9NJoDq11

atrapa:opis animacji

Animacja przedstawia nuty pewnego utworu umieszczone na pięciolinii. W pewnym momencie pięciolinia znika, zamiast niej pojawia się układ współrzędnych, a nuty zamieniają się w punkty.

Przykład 1



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R8CxieBabAHlz

Pojęcie ciągu.Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej_atrapa_animacja_6087

Animacja przedstawia jakie przyporządkowanie możemy nazywać ciągiem.

Definicja: Definicja ciągu

- Ciągiem nazywamy funkcję, określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywamy **wyrazami ciągu**.
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to jego dziedziną jest zbiór dodatnich liczb całkowitych. **Dziedziną ciągu** skończonego jest zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą.
- **Ciąg dwuwyrazowy** jest parą uporządkowaną, z którą spotkaliśmy się, np. podając współrzędne punktu w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Zwróćmy uwagę, że pary uporządkowane $(1, 3)$ i $(3, 1)$ są różne.
- Ciąg opisany w przykładzie powyżej jest skończony, ponieważ w kolejce stoi 5 osób, czyli skończona liczba osób. Dziedziną tego ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Jeżeli elementy jakiegoś zbioru ponumerujemy, a więc ustalimy kolejność tych elementów, to w ten sposób otrzymamy ciąg.

W praktyce będziemy zajmować się najczęściej ciągami liczbowymi, czyli takimi, których wyrazy są liczbami. Ciąg oznaczamy zazwyczaj (a_n), (b_n), (c_n) itd. Natomiast a_n oznacza n-ty wyraz ciągu (a_n), na przykład drugi wyraz ciągu (a_n) to a_2.

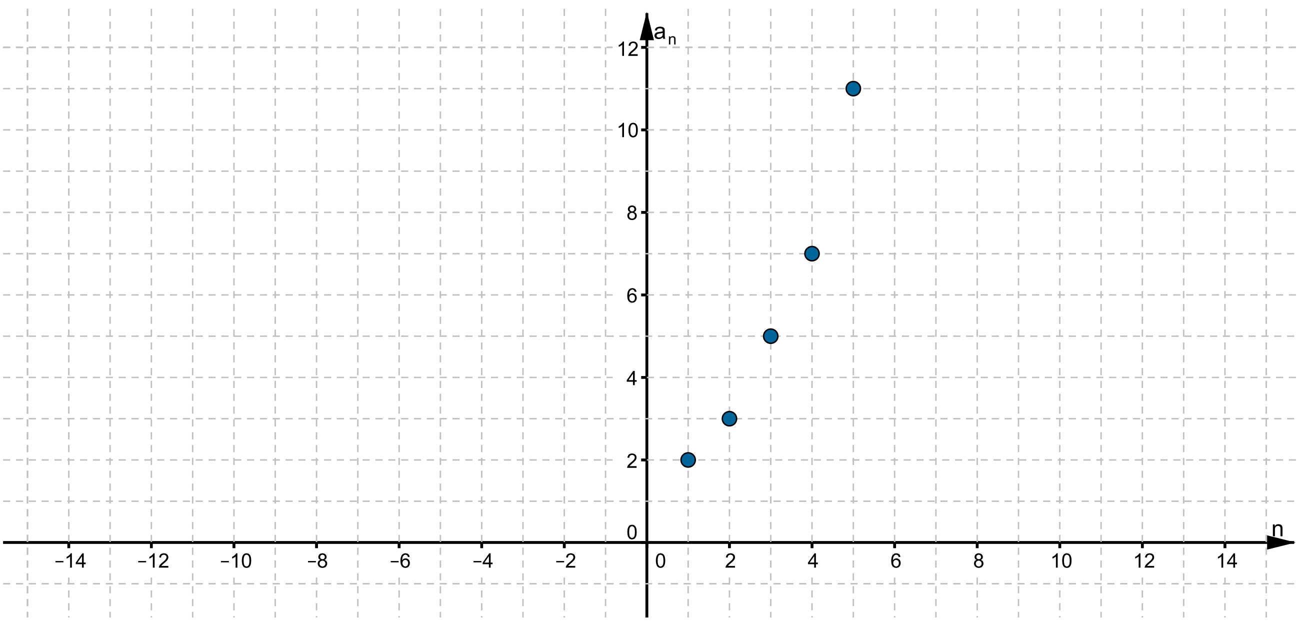
Jeżeli ciąg z podanego wyżej przykładu 1 oznaczymy (a_n), to $a_1 =$ Tomek, $a_2 =$ Małgosia, $a_3 =$ Julka, $a_4 =$ Franek, $a_5 =$ Jurek.

Przykład 2

Rozpatrzmy ciąg (a_n) składający się z 5 wyrazów, które są kolejnymi początkowymi liczbami pierwszymi. Przypomnijmy, że najmniejszą liczbą pierwszą jest 2. Zatem

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11.$$

Ciąg liczbowy, podobnie jak inne funkcje, można opisać na różne sposoby, np. narysować jego wykres. Oto wykres tego ciągu:



Przykład 3

Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = n^2 + 3n$.

Aby obliczyć wyraz o numerze n, należy podnieść numer wyrazu do kwadratu i dodać do niego potrojony numer tego wyrazu.

W ten sposób obliczamy

$$a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$$

$$a_3 = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$$

$$a_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 = 28$$

$$a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$$

$$a_6 = 6^2 + 3 \cdot 6 = 54.$$

Tak samo możemy obliczyć wyraz o dowolnie wybranym numerze, np.

$$a_{65} = 65^2 + 3 \cdot 65 = 4420$$

$$a_{100} = 100^2 + 3 \cdot 100 = 10300.$$

Podany przez nas wzór ma tę własność, że każdy wyraz ciągu jest uzależniony od numeru tego wyrazu. Tego typu wzór określający ciąg nazywamy wzorem ogólnym.

Polecenie 1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DrfCvSpdW

Przykład 4

Dany jest ciąg ułamków takich, że licznik każdego z tych ułamków, a więc każdego wyrazu tego ciągu równy jest numerowi, a mianownik jest o 1 większy od licznika. Zatem ciąg ten ma postać $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$. Jego n-ty wyraz możemy opisać wzorem ogólnym $a_n = \frac{n}{n+1}$. Znając wzór, możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu, np.

$$a_{73} = \frac{73}{73+1} = \frac{73}{74}.$$

Przykład 5

Dany jest ciąg nieskończony (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n+1}{2n-7}$. Wypiszmy wszystkie wyrazy ujemne tego ciągu.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu to ułamek $\frac{n+1}{2n-7}$, którego licznik, czyli $n+1$, jest dodatni, gdyż $n \geq 1$. Zatem ułamek jest ujemny, gdy jego mianownik jest ujemny, czyli gdy $2n - 7 < 0$, a więc $n < 3{,}5$. Wynika stąd, że ujemnymi wyrazami są tylko trzy początkowe wyrazy:

$$a_1 = \frac{1+1}{2-7} = -\frac{2}{5}, a_2 = \frac{2+1}{4-7} = -1, a_3 = \frac{3+1}{6-7} = -4.$$

Przykład 6

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \frac{(-1)^n \cdot (n^2-25)}{n+2}$.

1. Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_3, a_{10}.

   Korzystając z wzoru ogólnego, mamy:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot (1^2 - 25)}{1+2} = 8$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2 \cdot (2^2 - 25)}{2+2} = -\frac{21}{4} = -5\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot (3^2 - 25)}{3+2} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$a_{10} = \frac{(-1)^{10} \cdot (10^2 - 25)}{10+2} = \frac{75}{12} = 6\frac{1}{4}.$$

1. Wykaż, że $a_5 < a_6$ oraz $a_6 > a_7$.

   Obliczmy

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot (5^2 - 25)}{5+2} = 0, a_6 = \frac{(-1)^6 \cdot (6^2 - 25)}{6+2} = \frac{11}{8},$$

$$a_7 = \frac{(-1)^7 \cdot (7^2 - 25)}{7+2} = -\frac{24}{9} = -2\frac{2}{3}$$

co oznacza, że $a_5 < a_6$ oraz $a_6 > a_7$.

Przykład 7

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = (n+3)(2n-5)$.

1. Uzasadnij, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.
   Przypuśćmy, że któryś z wyrazów jest równy zero, a więc $a_n = 0$. Zatem $(n+3)(2n-5) = 0$, czyli $n+3 = 0$ lub $2n-5 = 0$. Stąd $n = -3$ lub $n = 2{,}5$. Żadna z tych równości nie jest prawdziwa, gdyż n to numer wyrazu ciągu i jest dodatnią liczbą całkowitą. To oznacza, że żaden wyraz tego ciągu nie jest równy 0.
2. Który wyraz tego ciągu jest równy 6?
   Podobnie jak poprzednio, rozwiązujemy równanie $a_n = 6$, czyli $(n+3)(2n-5) = 6$. Po przekształceniu tego równania otrzymujemy równanie kwadratowe $2n^2 + n - 21 = 0$, które ma dwa rozwiązania $n = -3{,}5$ lub $n = 3$. Tylko drugie z tych rozwiązań jest dodatnią liczbą całkowitą, więc $n = 3$. Oznacza to, że tylko trzeci wyraz tego ciągu jest równy 6.

Przykład 8

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \sqrt{3n+6}$. Który wyraz tego ciągu jest równy $2\sqrt{3}$?

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3n+6} = 2\sqrt{3}$, czyli $\sqrt{3n+6} = \sqrt{12}$. Stąd wynika, że $3n + 6 = 12$, więc $n = 2$. Zatem jedynie $a_2 = 2\sqrt{3}$.

Przykład 9

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \sqrt[3]{n-2}$. Oblicz a_1, a_2, a_3.

Obliczamy

$$a_1 = \sqrt[3]{1-2} = \sqrt[3]{-1} = -1, a_2 = \sqrt[3]{2-2} = 0, a_3 = \sqrt[3]{3-2} = 1.$$

Zauważmy, że podanie kilku początkowych wyrazów ciągu nie pozwala jednoznacznie obliczyć kolejnych jego wyrazów ani określić wzoru ogólnego tego ciągu. Rozpatrzmy nieskończony ciąg $(-1, 0, 1, \ldots)$. Można byłoby przypuszczać, że jest to ciąg z poprzedniego przykładu, a więc ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = \sqrt[3]{n-2}$. Można byłoby też przyjąć, że wzór ogólny tego ciągu to $a_n = n - 2$ lub $a_n = (n-2)^5$. Wówczas jednak inne byłyby już czwarte wyrazy tych ciągów. W pierwszym $a_4 = \sqrt[3]{2}$, w drugim $a_4 = 2$, a w ostatnim $a_4 = 32$.

Jeżeli oprócz podania początkowych wyrazów ciągu określimy również zasadę opisującą tworzenie kolejnych jego wyrazów z poprzednich wyrazów, to wtedy ciąg określimy w sposób jednoznaczny. Na przykład gdybyśmy przy określaniu ciągu nieskończonego $(-1, 0, 1, \ldots)$ podali jeszcze, że każdy jego wyraz, począwszy od wyrazu drugiego, jest o 1 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, to wówczas obie te informacje moglibyśmy zapisać krótko w postaci $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 1$ dla $n \geq 1$. W ten sposób można obliczyć kolejne wyrazy ciągu.

$$a_2 = a_1 + 1 = -1 + 1 = 0, a_3 = a_2 + 1 = 0 + 1 = 1, a_4 = a_3 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Jednak aby obliczyć np. $a_{100} = a_{99} + 1$, musimy najpierw obliczyć a_{99}, a_{98}, a_{97} itd. Zauważmy jednak, że ten sam ciąg opisuje wzór ogólny $a_n = n - 2$, który pozwala obliczyć dowolny wyraz ciągu, np.

$$a_{100} = 100 - 2 = 98.$$

Przykład 10

Wyznacz wzór ogólny ciągu, którego pierwszy wyraz jest równy 7, a każdy następny wyraz jest o 3 większy od poprzedniego.

Informacje podane w poleceniu możemy zapisać w postaci $a_1 = 7$, $a_{n+1} = a_n + 3$ dla $n \geq 1$.

Pierwszy wyraz ciągu to $a_1 = 7$. Obliczmy kilka następnych wyrazów tego ciągu:

$$a_2 = a_1 + 3 = 7 + 1 \cdot 3 = 10$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = 7 + 2 \cdot 3 = 13$$

$$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 + 3 = 7 + 3 \cdot 3 = 16.$$

Zauważmy, że trzeci wyraz jest większy od pierwszego wyrazu o dwie trójki, czyli o $2 \cdot 3$, czwarty jest większy od pierwszego o trzy trójki, czyli o $3 \cdot 3$. Zatem wyraz o numerze n jest większy od wyrazu pierwszego o $n - 1$ trójek. Wzór ogólny tego ciągu możemy więc zapisać w postaci

$$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3.$$

Zbadamy teraz, rozpatrując kilka przykładów, jak zachowują się kolejne wyrazy ciągu. Interesować nas będzie, czy wyrazy ciągu rosną, maleją, czy nie zmieniają się.

Przykład 11

Rozpatrzmy nieskończone ciągi (a_n), (b_n), (c_n) określone wzorami ogólnymi $a_n = \frac{1}{2} \cdot n - 5$, $b_n = \frac{2}{n} - 3$, $c_n = (n - 4)^2$. Obliczymy trzy pierwsze wyrazy każdego z tych ciągów:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 - 5 = -4\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 5 = -4, a_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 = -3\frac{1}{2}$$

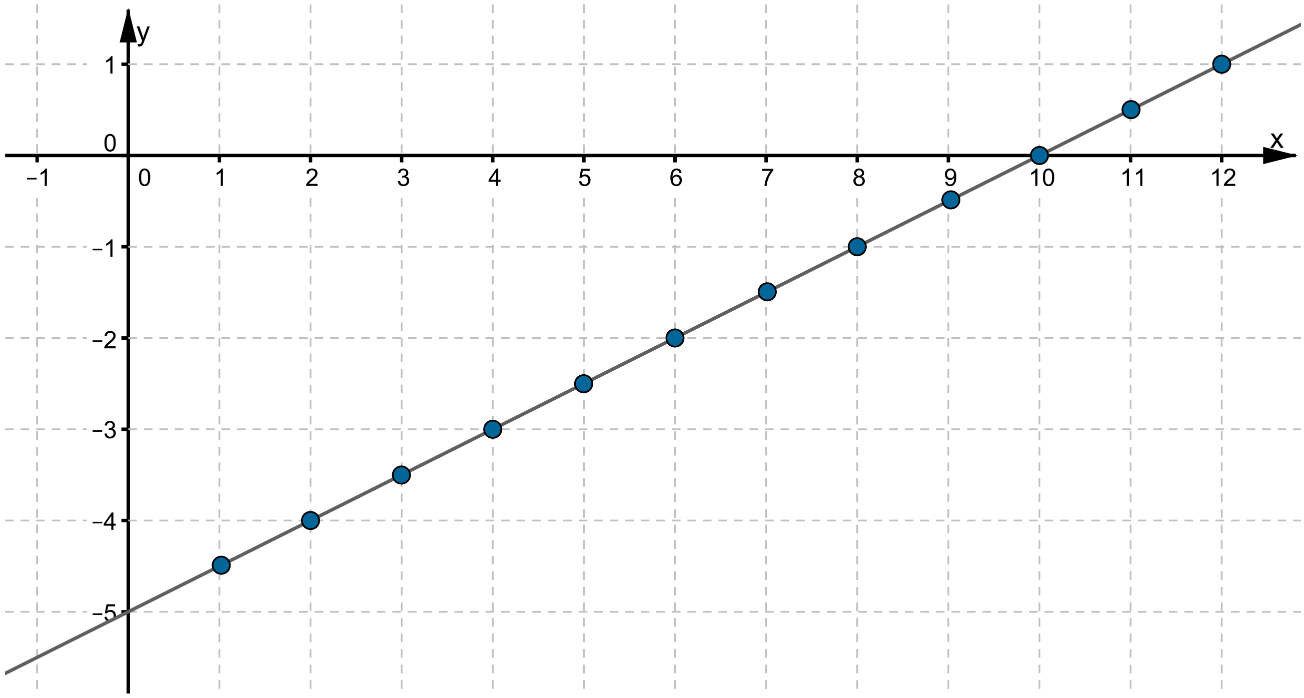
$$b_1 = \frac{2}{1} - 3 = -1, b_2 = \frac{2}{2} - 3 = -2, b_3 = \frac{2}{3} - 3 = -2\frac{1}{3}$$

$$c_1 = (1 - 4)^2 = 9, c_2 = (2 - 4)^2 = 4, c_3 = (3 - 4)^2 = 1.$$

Zauważmy, że

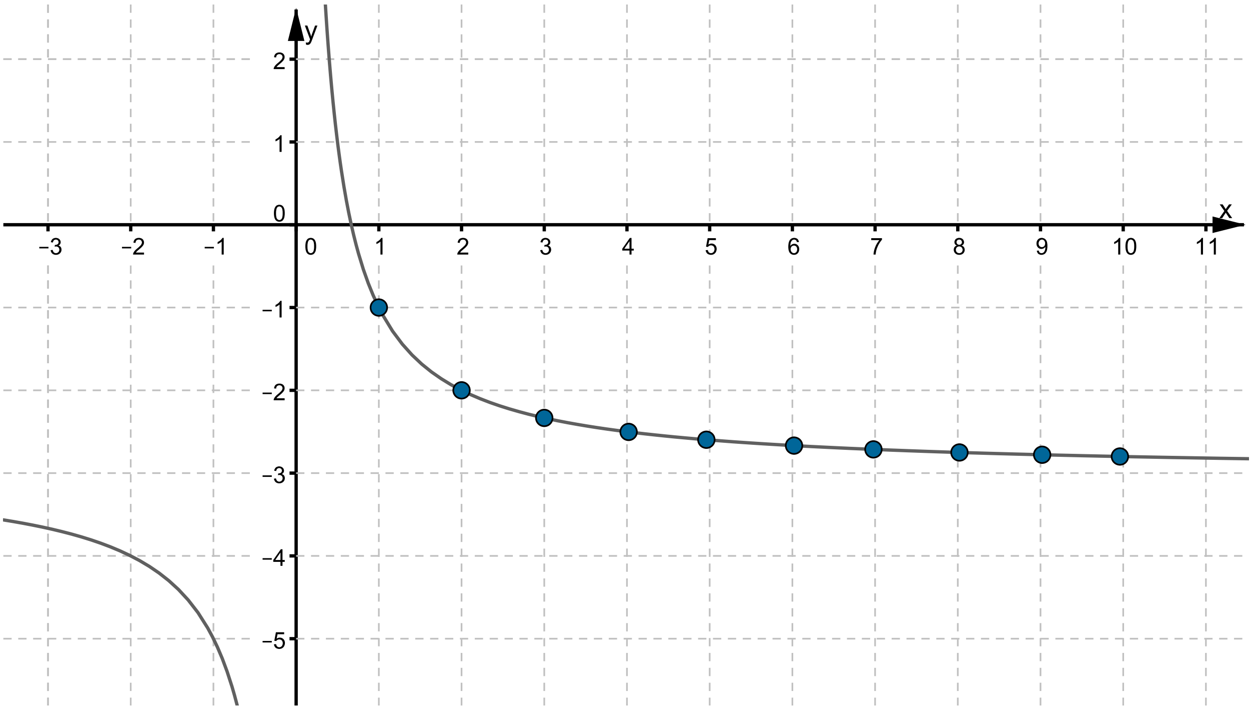
- Obliczone wyrazy ciągu (a_n) są coraz większe, a więc rosną. Tak też się dzieje z kolejnymi wyrazami tego ciągu, gdyż przy coraz większym n rośnie też wartość wyrażenia $\frac{1}{2}\ n-5$. Mówimy wówczas, że ciąg jest rosnący.

To samo możemy też stwierdzić, gdy zauważymy, że wykres ciągu (a_n) składa się z punktów leżących na prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x-5$. Ta prosta jest wykresem rosnącej funkcji liniowej. Zatem i ciąg (a_n) jest rosnący.



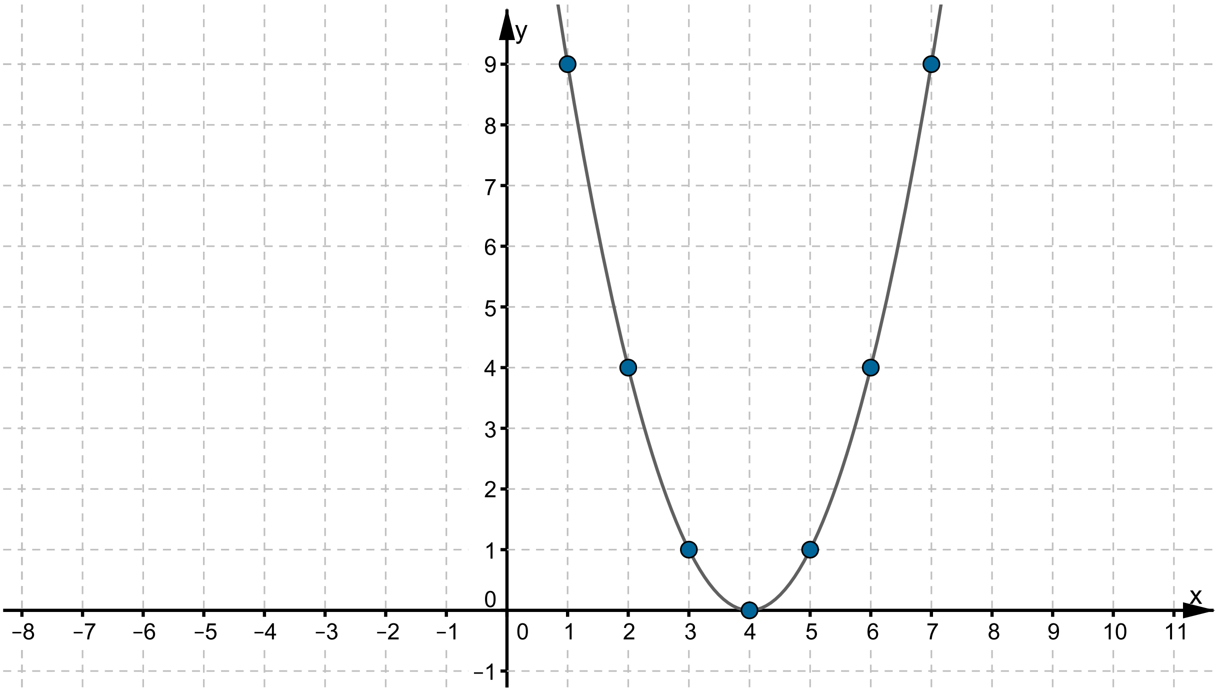
- Obliczone wyrazy ciągu (b_n) są coraz mniejsze, następne również maleją. Jest tak dlatego, że przy zwiększaniu n maleje ułamek $\frac{2}{n}$, a to oznacza, że maleje też różnica $\frac{2}{n}-3$. Ciąg (b_n) jest więc malejący.

Podobnie jak poprzednio do tego samego wniosku możemy dojść, zauważając, że wykres ciągu (b_n) składa się z punktów leżących na hiperboli o równaniu $y=\frac{2}{x}-3$. Ta hiperbola jest wykresem funkcji, która w przedziale $(0,\ +\infty)$ jest malejąca. Zatem i ciąg (b_n) jest malejący.

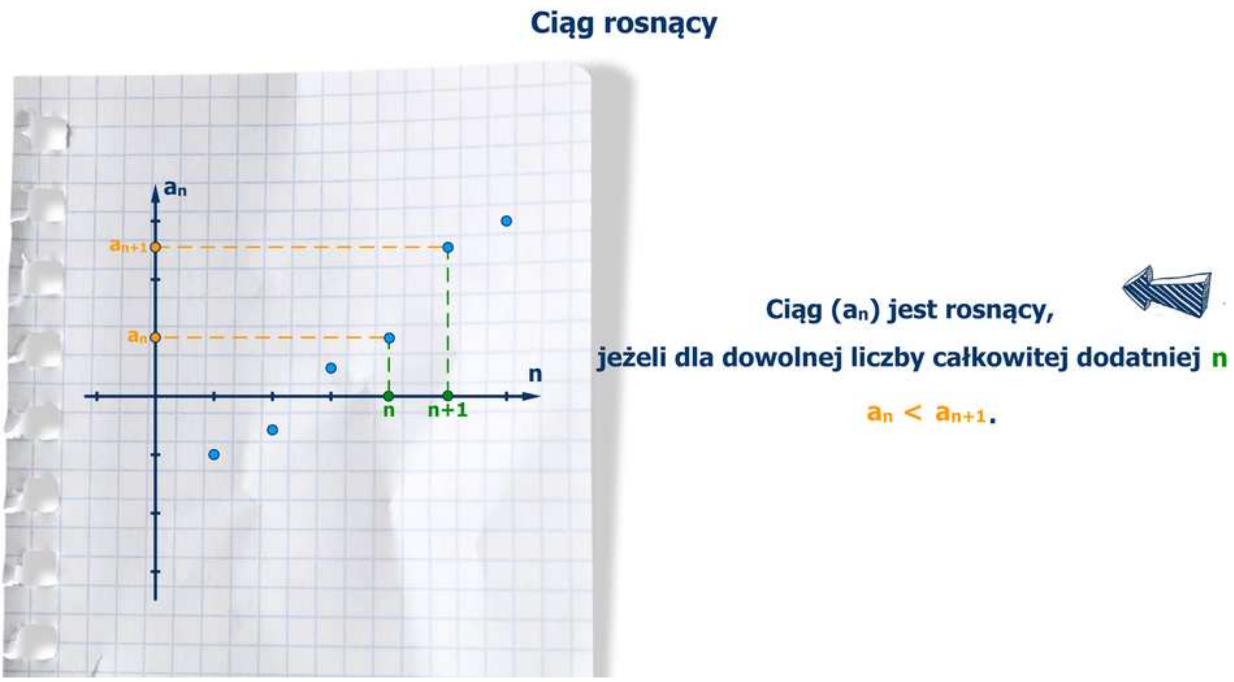


Pojęcie ciągu.Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej_rys_453

- Obliczone wyrazy ciągu (c_n) maleją, czwarty wyraz jest mniejszy od trzeciego $(c_4 = 0 < 1 = c_3)$, ale już kolejne wyrazy nie są coraz mniejsze. Piąty wyraz jest większy od czwartego $c_5 = 1 > 0 = c_4$. Ciąg ten nie jest więc malejący, nie jest też rosnący. To samo możemy zauważyć, patrząc na wykres (c_n), który składa się z punktów leżących na paraboli o równaniu $y = (x-4)^2$. Parabola ta jest wykresem funkcji malejącej w przedziale $(-\infty, 4\rangle$, a rosnącej w przedziale $\langle 4, +\infty)$. Funkcja ta nie jest więc monotoniczna w przedziale $\langle 1, +\infty)$, a w tym przedziale leżą wszystkie numery wyrazów ciągu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

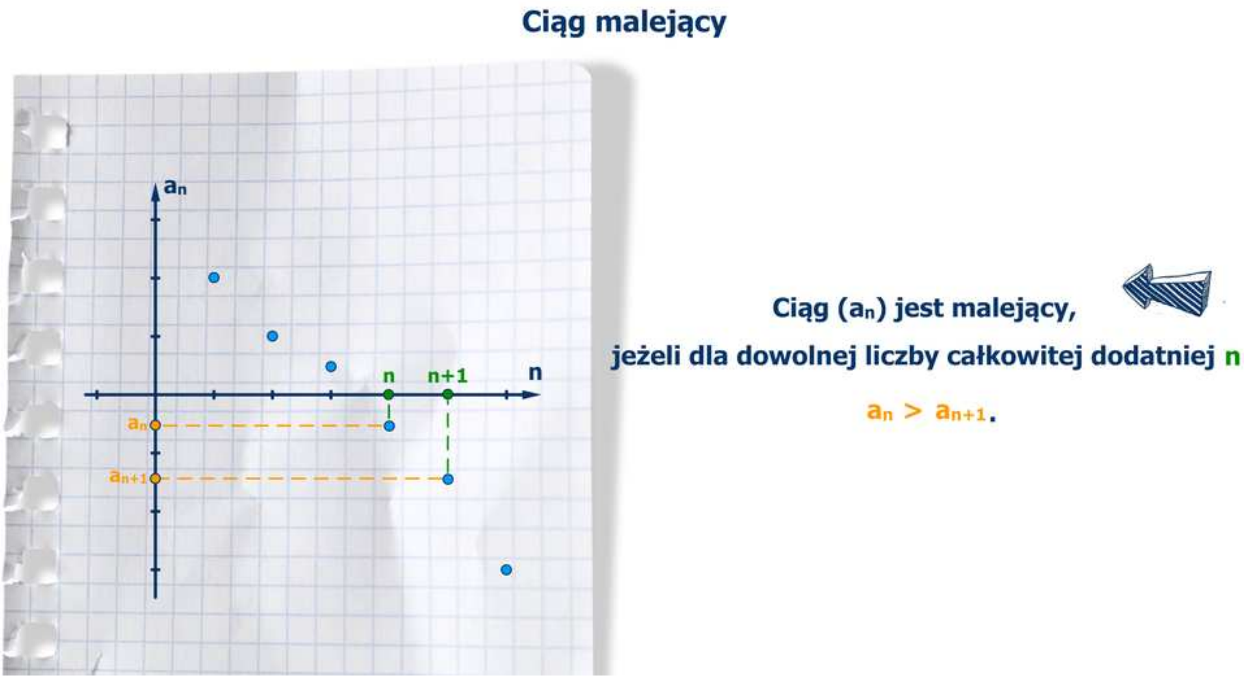


Film dostępny pod adresem /preview/resource/RI2lfg4Oxq38C

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

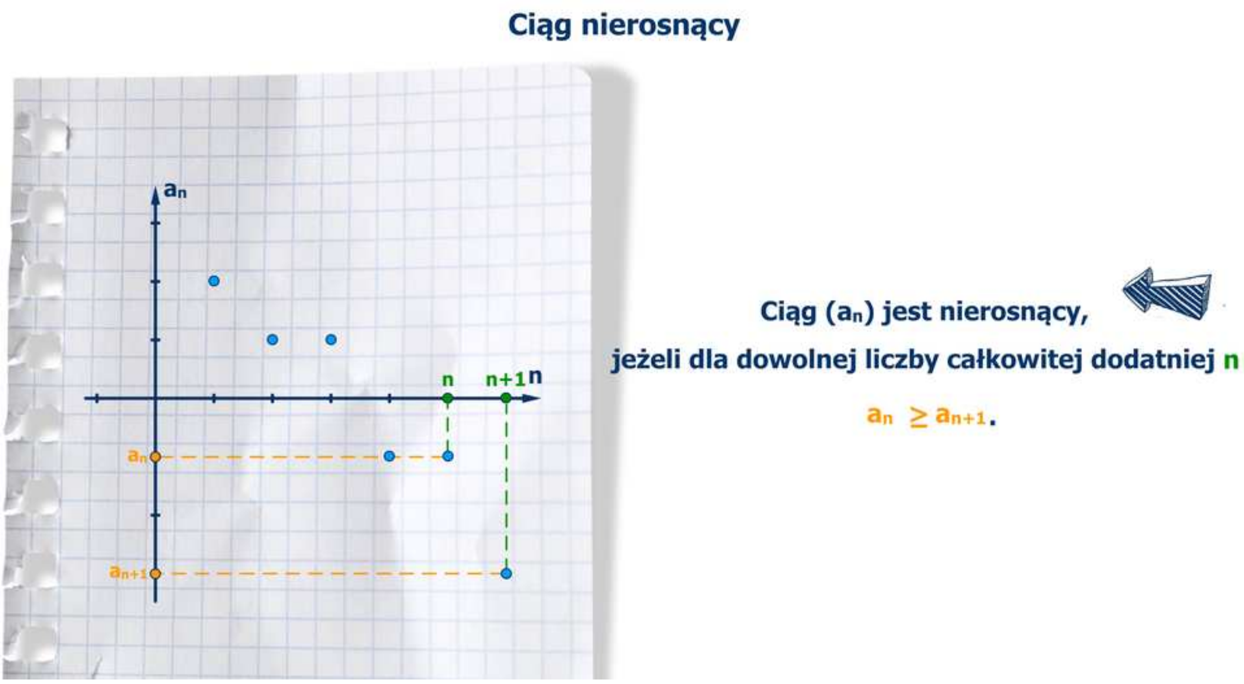
Animacja przedstawia jak definiujemy ciąg rosnący.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1XdisAm3gDIT

atrapa:opis animacji

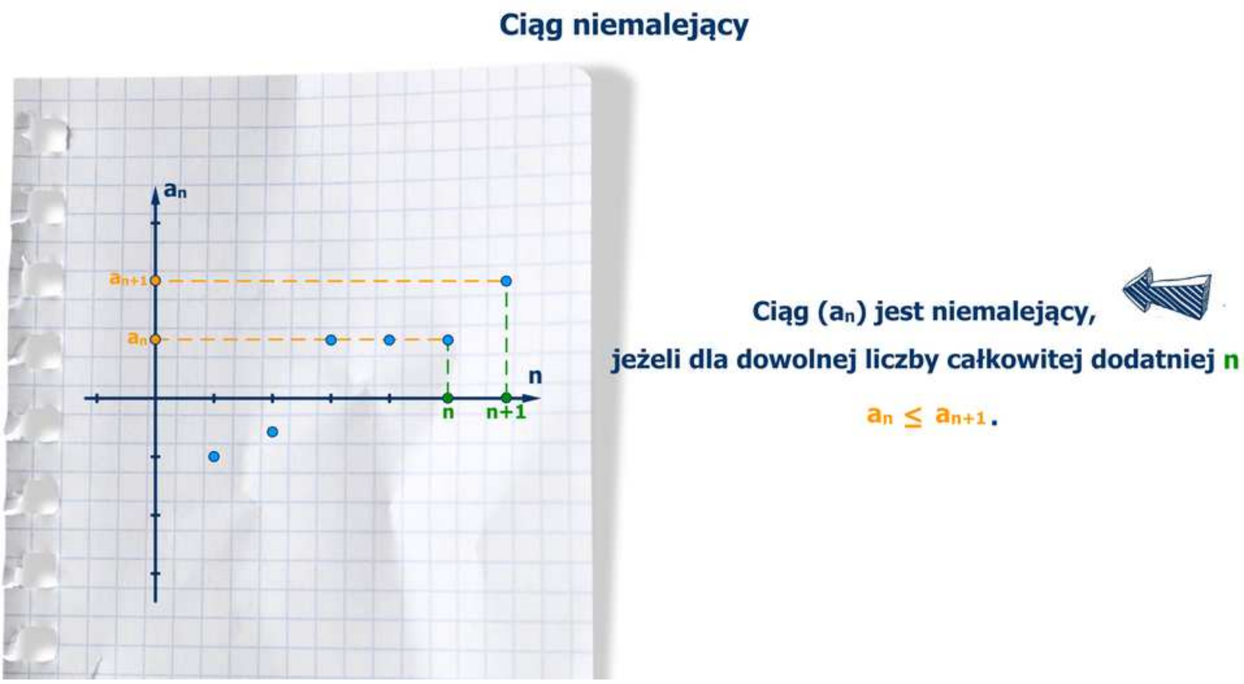
Animacja przedstawia jak definiujemy ciąg malejący.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RZCTxtqMlBNLD

atrapa:opis animacji

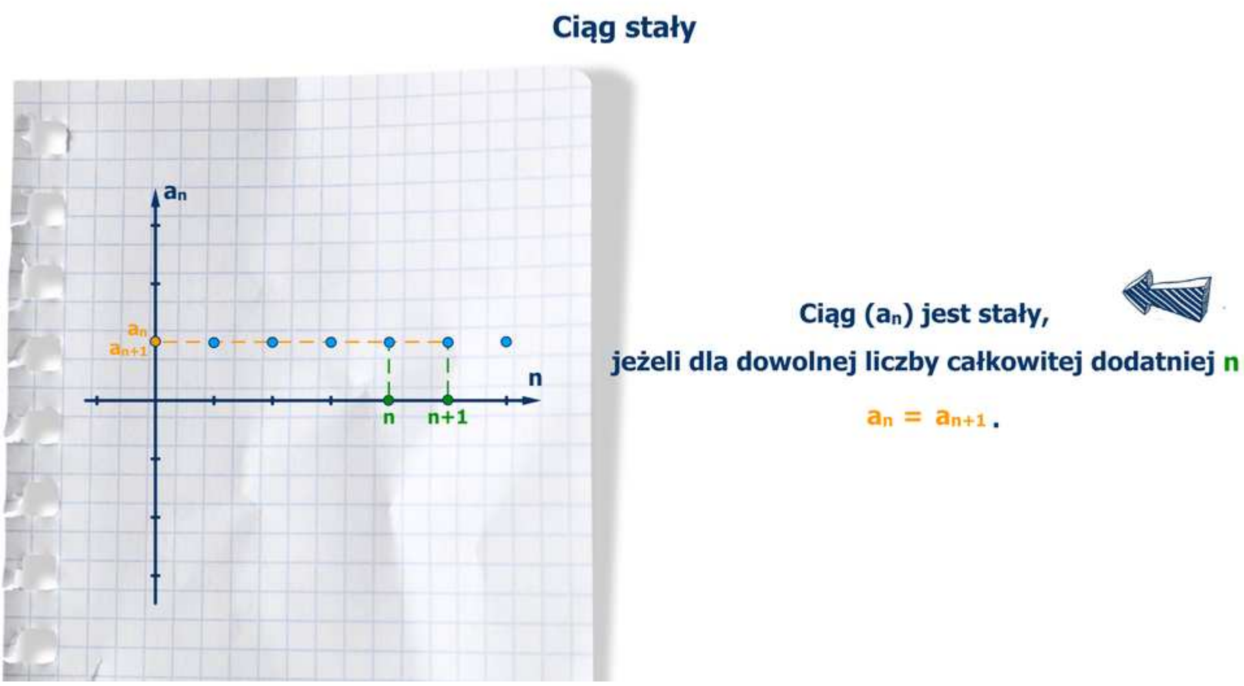
Animacja przedstawia jak definiujemy ciąg nierosnący.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RCcoXl4UjjS16

atrapa:opis animacji

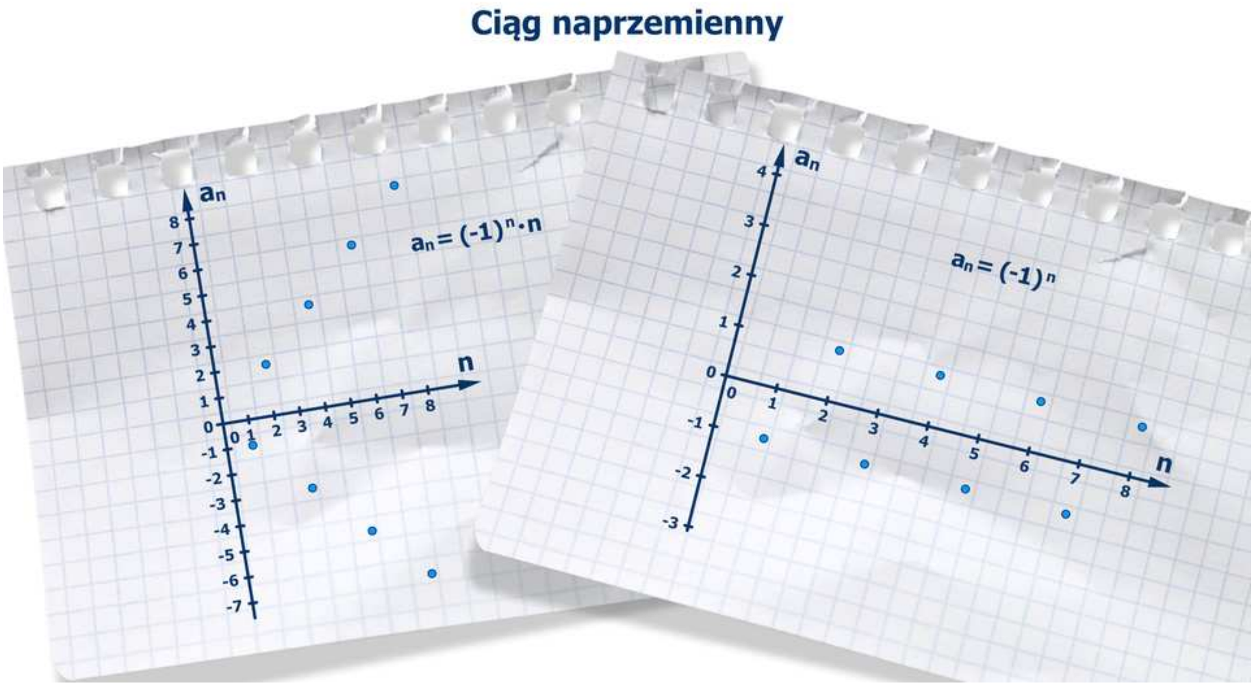
Animacja przedstawia jak definiujemy ciąg niemalejący.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RkFDHryCwcWMG atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak definiujemy ciąg stały.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R11DGD649l8Vg

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykładowe ciągi naprzemienne.

Definicja: Ciągi monotoniczne

- Ciąg nazywamy **rosnącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} > a_n.$$

- Ciąg nazywamy **malejącym,** jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} < a_n.$$

- Ciąg nazywamy **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a_{n+1} = a_n.$$

- Ciąg nazywamy **niemalejącym,** jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

- Ciąg nazywamy **nierosnącym,** jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Jeżeli ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały, to mówimy, że ten ciąg jest **monotoniczny**. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne.

Przykład 12

Ciąg określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n$ nie jest monotoniczny. Wystarczy obliczyć trzy pierwsze wyrazy tego ciągu: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$. Ponieważ $a_2 > a_1$ i $a_3 < a_2$, więc ciąg nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 1

W tabeli podane zostały wszystkie wyrazy ciągu (a_n).

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	-3	-1	0	1	3	5	4

1. Narysuj wykres ciągu (a_n).
2. Rozstrzygnij, czy ciąg (a_n) jest monotoniczny.

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

- Siódmy wyraz tego ciągu jest równy 15.
- Pierwszym wyrazem dodatnim tego ciągu jest a_5.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Nieskończony ciąg opisany jest wzorem $a_n = n^2 - 6n + 5$.

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność $a_n \geq -4$.

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Niech a_n oznacza liczbę wszystkich naturalnych dzielników dodatniej liczby całkowitej n, gdzie $1 \leq n \leq 7$. Sporządź wykres ciągu (a_n). Który wyraz tego ciągu jest największy?

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Ćwiczenie 16

Połącz w pary.

<math><mn>1</mn><mo>+</mo><mfrac><mn>1</mn><mi>n</mi></mfrac></math>, <math><mn>2</mn><mo>+</mo><mfrac><mrow><mo>(</mo><mo>-</mo><mn>1</mn><msup><mo>)</mo><mi>n</mi></msup></mrow><mi>n</mi></mfrac></math>, <math><mn>2</mn><mo>-</mo><mfrac><mn>1</mn><mi>n</mi></mfrac></math>, <math><mfrac><mn>2</mn><mi>n</mi></mfrac></math>, <math><mn>1</mn><mo>+</mo><mfrac><mrow><mo>(</mo><mo>-</mo><mn>1</mn><msup><mo>)</mo><mi>n</mi></msup></mrow><mi>n</mi></mfrac></math>

$(2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots)$	
$(0, 1\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots)$	
$(1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \ldots)$	
$(1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots)$	
$(2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots)$	

Ćwiczenie 17

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.