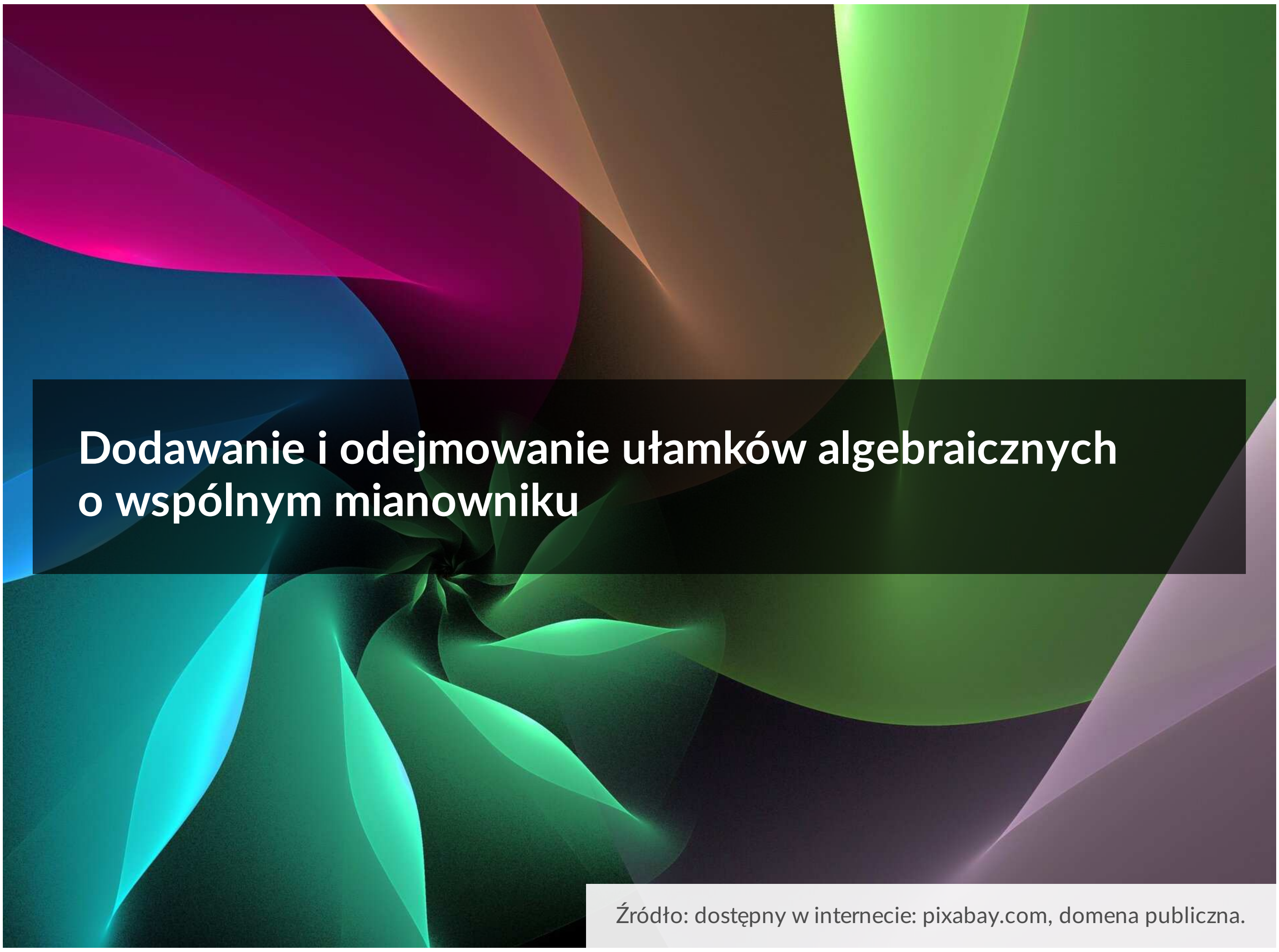
Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o wspólnym mianowniku

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o wspólnym mianowniku



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiemy, jak dodawać ułamki zwykłe o wspólnym mianowniku.

W przypadku ułamków algebraicznych będzie podobnie – wyrażenia o wspólnym mianowniku dodajemy obliczając sumę ich liczników, a mianownik pozostawiając bez zmian.

Jak zawsze przy ułamkach algebraicznych musimy pamiętać o podaniu odpowiednich założeń.

> **Twoje cele**
>
> - Wykonasz obliczenia prowadzące do wyznaczenia sumy lub różnicy ułamków algebraicznych o wspólnych mianownikach.
> - Opiszesz założenia, przy których wykonanie danych działań jest możliwe.
> - Zbadasz, czy uzyskane wyniki można przedstawić w prostszej postaci, wykorzystując skracanie ułamków.

Przeczytaj

Własność: Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych o wspólnym mianowniku

Dane są wielomiany $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Rozważmy wyrażenia wymierne $\frac{F(x)}{Q(x)}$ oraz $\frac{G(x)}{Q(x)}$.

- **suma** wyrażeń: $\frac{F(x)}{Q(x)} + \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)+G(x)}{Q(x)}$
- **różnica** wyrażeń: $\frac{F(x)}{Q(x)} - \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)-G(x)}{Q(x)}$

Należy pamiętać o podaniu założeń ($Q(x) \neq 0$).

Przykład 1

Obliczmy sumę i różnicę wyrażeń $\frac{1}{2x-7}$ i $\frac{4x-3}{2x-7}$.

- Zapiszmy sumę:
  $\frac{1}{2x-7} + \frac{4x-3}{2x-7} = \frac{1+4x-3}{2x-7} = \frac{4x-2}{2x-7}$;
  Określmy dziedzinę, biorąc pod uwagę miejsca zerowe mianownika: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
- Analogicznie obliczmy różnicę:
  $\frac{1}{2x-7} - \frac{4x-3}{2x-7} = \frac{1-(4x-3)}{2x-7} = \frac{4-4x}{2x-7}$;
  Określmy dziedzinę: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Przykład 2

Obliczmy sumę i różnicę ułamków $\frac{2x}{x-3}$ oraz $\frac{6}{3-x}$.

- Zauważmy, że $\frac{6}{3-x} = -\frac{6}{x-3}$.
- Obliczmy sumę. Zauważmy, że będzie możliwe skracanie ułamka:
  $\frac{2x}{x-3} + \frac{6}{3-x} = \frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$;
  przy czym $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Obliczmy różnicę:
  $\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{3-x} = \frac{2x}{x-3} + \frac{6}{x-3} = \frac{2x+6}{x-3}$;
  tutaj również $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Przykład 3

Obliczmy sumę i różnicę ułamków $\frac{x^2+2x}{x^2-3x-10}$ i $\frac{2x+4}{x^2-3x-10}$.

- Warto na początek sprowadzić mianownik do postaci iloczynowej. Dzięki temu łatwo będzie podać założenia i na koniec obliczeń odpowiednio skrócić uzyskany wynik.

- Obliczmy sumę:
$\frac{x^2+2x}{x^2-3x-10} + \frac{2x+4}{x^2-3x-10} = \frac{x^2+2x+2x+4}{(x+2)(x-5)} =$
$= \frac{x^2+4x+4}{(x+2)(x-5)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5};$
przy czym ze względu na mianownik $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$.
- W podobny sposób obliczmy różnicę:
$\frac{x^2+2x}{x^2-3x-10} - \frac{2x+4}{x^2-3x-10} = \frac{x^2+2x-(2x+4)}{(x+2)(x-5)} =$
$= \frac{x^2+2x-2x-4}{(x+2)(x-5)} = \frac{x^2-4}{(x+2)(x-5)} =$
$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-2}{x-5};$
założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$.

Uwaga

Dodając lub odejmując ułamki o tych samych mianownikach warto w miarę możliwości zapisać mianownik w postaci iloczynowej.
Może to ułatwić wyznaczenie dziedziny oraz ewentualne skracanie uzyskanego wyniku.

Przykład 4

Przedstawmy w najprostszej postaci wyrażenie
$\frac{x^2+3x}{x^3-9x} + \frac{3x-9}{x^3-9x} - \frac{6x}{x^3-9x}$.

- Sprowadźmy na początek mianownik do postaci iloczynowej.
- $\frac{x^2+3x}{x^3-9x} + \frac{3x-9}{x^3-9x} - \frac{6x}{x^3-9x} =$
$= \frac{x^2+3x+3x-9-6x}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-9}{x(x+3)(x-3)} =$
$= \frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x};$
Zauważmy, że w ostatnim kroku mogliśmy dokonać skrócenia ułamka.
Określmy jeszcze założenia pamiętając, że mianownik (przed skracaniem) nie może przyjąć wartości 0: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$.

Przykład 5

Przedstawmy w najprostszej postaci wyrażenie
$\frac{x^3+1}{x^3-1} - \frac{(x-2)^2}{x^3-1} + \frac{2x^2+3}{x^3-1} + \frac{(x-1)^2}{x^3-1}$.

- Zapiszmy mianownik w postaci iloczynu:
- $\frac{x^3+1}{x^3-1} - \frac{(x-2)^2}{x^3-1} + \frac{2x^2+3}{x^3-1} + \frac{(x-1)^2}{x^3-1} =$
$= \frac{x^3+1}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{x^3+1-x^2+4x-4+2x^2+3+x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = (i)$
- Zapiszmy w postaci iloczynowej również licznik i sprawdźmy, czy jest możliwe skrócenie ułamka:

> $(i) = \frac{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$;
> - Określmy dziedzinę: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Słownik

> **dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych o wspólnym mianowniku**
>
> - suma wyrażeń: $\frac{F(x)}{Q(x)} + \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)+G(x)}{Q(x)}$
> - różnica wyrażeń: $\frac{F(x)}{Q(x)} - \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)-G(x)}{Q(x)}$
>
> należy określić dziedzinę ($Q(x) \neq 0$)

> **dziedzina wyrażenia algebraicznego**
>
> wszystkie liczby rzeczywiste, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z czterema zaprezentowanymi w animacji przykładami dodawania i odejmowania ułamków.

Zwróć uwagę na konieczność określenia dziedziny.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFTjIziWM

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dodawania i odejmowania ułamków algebraicznych o wspólnym mianowniku.

Polecenie 2

Oblicz sumę $\frac{x^2+3x}{x^3-x} + \frac{1-x}{x^3-x}$.

Polecenie 3

Oblicz różnicę $\frac{5x}{3x^2-18x+24} - \frac{3x-4}{3x^2-18x+24}$.

Polecenie 4

Oblicz $\frac{x}{x-7} + \frac{21}{7-x} + \frac{2x}{x-7}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wynikiem działania $\frac{2x+4}{5x} - \frac{3x}{5x} + \frac{x+5}{5x}$, określonego dla $x \neq 0$, jest

- $\frac{x}{5x}$
- $\frac{6x+9}{5x}$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{9}{5}x$
- $\frac{9}{5x}$

Ćwiczenie 2

Wynikiem działania $\frac{5x(x-5)}{x^2+1} - \frac{(x+10)(x^2-25)}{x^2+1}$, określonego dla $x \in \mathbb{R}$, jest:

- $\frac{-250-50x-5x^2-x^3}{x^2+1}$
- $\frac{250+20x-5x^2-x^3}{x^2+1}$
- $\frac{250-5x^2-x^3}{x^2+1}$
- $\frac{x^3+15x^2-30x-250}{x^2+1}$
- $\frac{x^3+15x^2-50x-250}{x^2+1}$

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę $\frac{2x+9}{x^2-25}+\frac{(x+4)^2}{x^2-25}$, określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$.

- $\frac{x^2+3x+25}{(x+5)(x-5)}$
- $\frac{x-5}{x+5}$
- $\frac{x+5}{x-5}$
- $\frac{x^2+2x+25}{(x+5)(x-5)}$
- $\frac{x^2+6x+25}{(x+5)(x-5)}$

Ćwiczenie 4

Do każdego działania dobierz jego wynik:

$\frac{(x+3)^2}{x^3+2x^2-x-2}-\frac{3x+7}{x^3+2x^2-x-2}$	$\frac{1}{x-1}$
$\frac{(x+1)^2}{x^3+2x^2-x-2}-\frac{2x+2}{x^3+2x^2-x-2}$	$\frac{1}{x+2}$
$\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{5x-6}{x^3+2x^2-x-2}$	$\frac{1}{x+1}$

Ćwiczenie 5

Wiadomo, że $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{ax+b}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$.

Zatem

- $a =$
- $b =$

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Oblicz $\frac{x}{x^3-6x^2+9x}+\frac{4x+12}{x^3-6x^2+9x}-\frac{2x^2+6x}{x^3-6x^2+9x}$. Wskaż wynik działania i dziedzinę.

- [ ] $\frac{2x-4}{x(x-3)}$
- [ ] $\frac{2x^2-4x}{(x-3)^2}$
- [ ] $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$
- [ ] $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$
- [ ] $\frac{2x^2+x-12}{x(3-x)^2}$
- [ ] $\frac{2x^2+11x+12}{x(x-3)^2}$
- [ ] $\frac{-2x^2-x+12}{x(x-3)^2}$
- [ ] $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o wspólnym mianowniku

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

8. dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza sumę lub różnicę ułamków algebraicznych o wspólnych mianownikach,
- opisuje założenia, przy których wykonanie danych działań jest możliwe,
- bada, czy uzyskane wyniki można przedstawić w prostszej postaci, wykorzystując skracanie ułamków.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom telmat lekcji i jej cele.
2. Uczniowie ustalają kryteria sukcesu.
3. Uczniowie w trakcie krótkiej dyskusji przypominają wiadomości na temat wyrażeń wymiernych, a w szczególności i ich dziedziny.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj"). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Następnie uczniowie zapoznają się z materiałem zawartym w animacji. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której eksperci wspierani przez nauczyciela wyjaśniają niezrozumiałe elementy materiału.
3. Uczniowie wykonują polecenia umieszczone pod animacją.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania 3-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-2 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Zapisywanie i odczytywanie wyrażeń algebraicznych

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie zadania zawarte w animacji rozwiązują samodzielnie jako pracę domową. Porównują swoje rozwiązanie z tym przedstawionymi w animacji.