Ciągłość funkcji w punkcie

Źródło: Gerd Altmann from Pixabay, domena publiczna.

Pierwsze sformułowanie ciągłości funkcji podał w 1817 roku w pracy *Rein analytischer Beweis* praski matematyk i teolog Bernard Bolzano $(1781 - 1848)$.

Około roku 1830 Bolzano podał twierdzenia dotyczące funkcji ciągłych i zawarł je w skrypcie *Functionenlehre*, który został opublikowany dopiero 100 lat później przez czeskiego matematyka Karela Rychlika.

Bernard Bolzano sformułował wiele ważnych twierdzeń matematycznych, ale ponieważ jego prace opublikowano dopiero po jego śmierci, były przypisywane innym naukowcom.

W tym materiale zajmiemy się ciągłością funkcji w punkcie.

Twoje cele

- Poznasz definicję ciągłości funkcji w punkcie.
- Utrwalisz umiejętność obliczania granic funkcji w punkcie.
- Wykorzystasz definicję ciągłości funkcji w punkcie do rozwiązania zadań.

Przeczytaj

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0.

Definicja: Funkcja ciągła

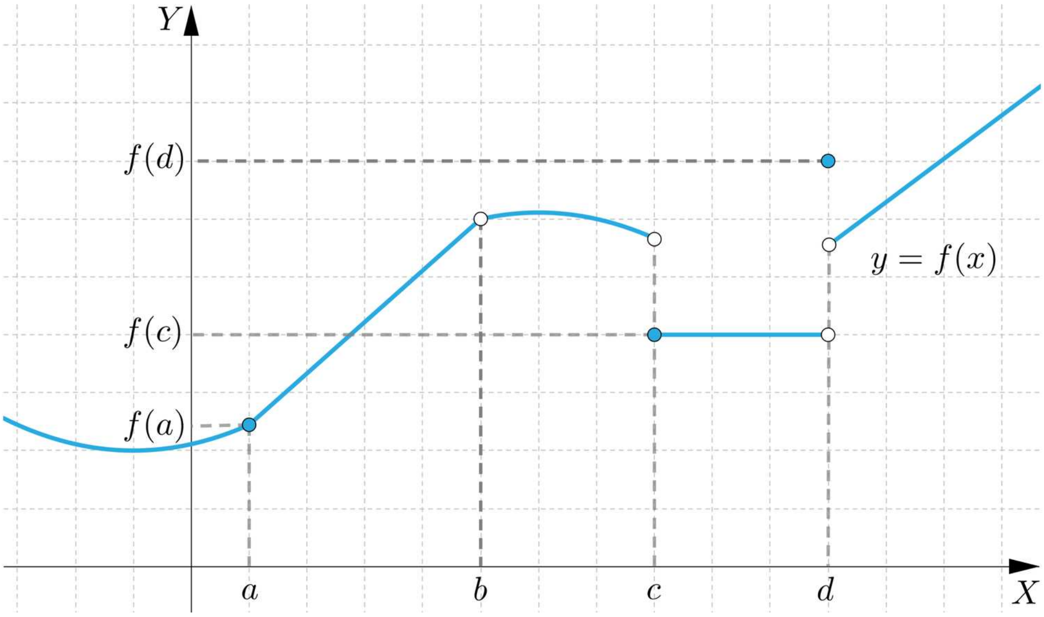
Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tak więc funkcja jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. funkcja jest określona w punkcie x_0;
2. istnieje granica funkcji $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$;
3. granica g równa się wartości $f(x_0)$.

Przykład 1



Przedstawiona na rysunku funkcja jest ciągła w punkcie a, natomiast nie jest ciągła w punkcie b (gdyż nie jest spełniony warunek 1), punkcie c i d (bo nie są spełnione warunki 2 i 3).

Funkcja f ciągła w punkcie x_0 musi być w tym punkcie określona, a ponadto musi istnieć granica funkcji f w punkcie x_0 i być równa wartości funkcji f w tym punkcie.

Oznacza to, że nie ma sensu zastanawianie się nad ciągłością funkcji w punkcie, który nie należy do dziedziny.

Istnienie granicy funkcji w punkcie x_0 oznacza, że granica lewostronna i prawostronna muszą być równe, czyli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Definicja: Punkt nieciągłości

x_0 jest punktem nieciągłości wtedy i tylko wtedy gdy funkcja f nie jest ciągłą w x_0.

Algorytm badania ciągłości funkcji w danym punkcie:

a) określenie dziedziny funkcji i określenie czy x_0 należy do dziedziny funkcji;

b) obliczenie wartości funkcji w punkcie x_0;

c) obliczenie granicy właściwej w punkcie x_0 – jeśli nie istnieje, to funkcja nie jest ciągła w tym punkcie;

d) porównanie wyliczonej granicy funkcji w punkcie x_0 z wartością funkcji w tym punkcie, jeśli są sobie równe, to funkcja jest ciągła w punkcie x_0 a jeśli są różne, to funkcja nie jest ciągła w tym punkcie.

Przykład 2

Zbadamy ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ 4-2^x, & x>1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 1$.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Oczywiście $f(1) = 2$. Policzmy granice jednostronne:
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 1+1 = 2$ oraz $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4-2^x) = 4-2 = 2.$

Otrzymujemy zatem ciąg równości:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(1),$$

więc funkcja jest ciągła w punkcie x_0.

Przykład 3

Zbadamy ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \le -1 \\ (x+2)(x-1) & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Wybieramy pierwszy człon funkcji, który jest określony dla $x \leq -1$ czyli też dla $x_0 = -1$.

Liczymy wartość funkcji w punkcie $x_0 = -1$:

$f(x_0) = f(-1) = -1$, czyli $f(-1) = -1$.

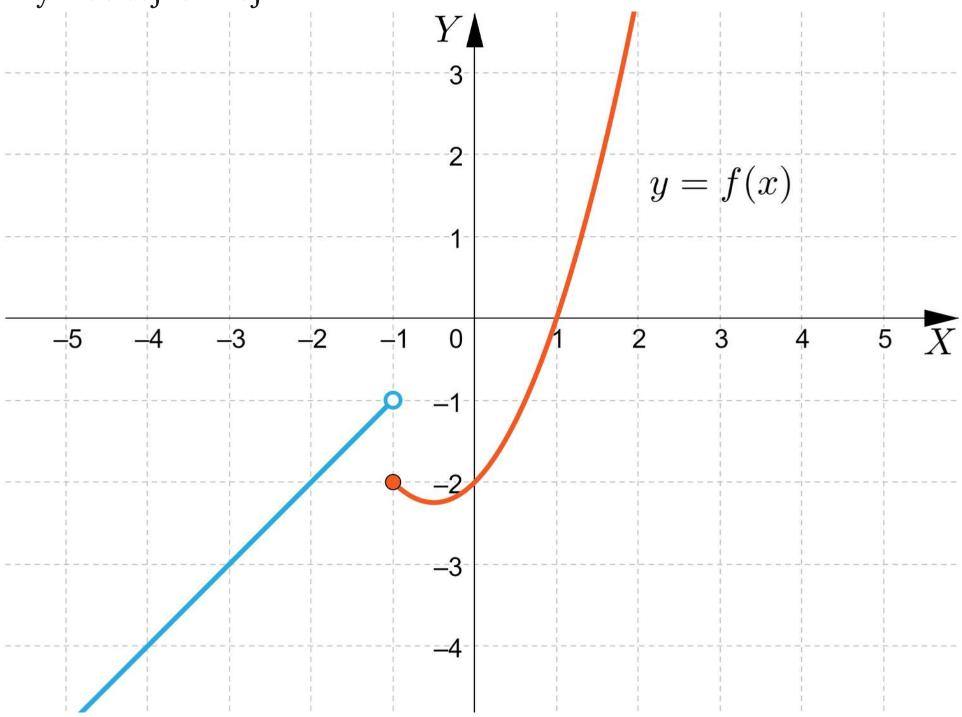
Teraz znajdujemy granicę funkcji w punkcie $x_0 = -1$:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x = -1$ i $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x+2)(x-1) = -2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

Granice jednostronne są różne. Nie istnieje granica w punkcie $x_0 = -1$ (punkcie nieciągłości), stąd funkcja f nie jest ciągła w tym punkcie.

Tak wygląda wykres tej funkcji:



Ciągłość funkcji należy kojarzyć z nierozerwalnością wykresu funkcji w badanym punkcie.

Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$.

Przykład 4

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}.$$

Wyznaczymy wartość parametru a, dla której funkcja f jest ciągła.

Rozwiązanie

Znajdujemy granicę funkcji w punkcie $x = 2$.

W tym celu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, zapiszemy $x^2 - 4$ jako $(x-2)(x+2)$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} (x+2) = 4$$

Ponieważ granica jest równa 4, więc dla $a = 4$ otrzymamy funkcję ciągłą.

Przykład 5

Wyznaczymy a i b tak, aby funkcja f była ciągła w $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ ax + b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Liczymy wartość funkcji w $x_0 = 0$:

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1.$

Aby funkcja była ciągła w x_0, musi być spełniony warunek:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Liczymy granice lewostronną i prawostronną w punkcie $x_0 = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 + 2x + 1\right) = 1$ i $\lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b$.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ ma być równe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b$ to $b = 1$, natomiast a może być dowolne.

Odpowiedź

> Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i $b = 1$.

Słownik

funkcja ciągła

funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

punkt nieciągłości

x_0 jest punktem nieciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f nie jest ciągłą w x_0

dziedzina funkcji

zbiór wszystkich wartości zmiennej niezależnej x, dla których funkcja $f(x)$ jest określona

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem prezentującym ciągłość funkcji w punkcie, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DghsdnNIE

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągłości funkcji w punkcie.

Polecenie 2

Sprawdź, czy funkcja f jest ciągła w $x_0 = 0$ i $x_1 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 5 & \text{dla } 0 < x < 2 \\ x+1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Polecenie 3

Wyznacz a tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{dla } x \leq 1 \\ ax & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

była ciągła w $x_0 = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciągłość funkcji w punkcie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granicę funkcji w punkcie;
- oblicza wartość funkcji w punkcie;
- posługuje się pojęciem ciągłości funkcji w punkcie;
- określa możliwe punkty nieciągłości na podstawie wzoru funkcji;
- podaje punkty, w których funkcja nie jest ciągła;
- dobiera wartości współczynników tak, aby funkcja była ciągła w danym punkcie;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania;
- przedstawia pełny tok rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny,
- burza mózgów,
- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e–podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają pojęcia dziedziny funkcji i granicy funkcji w punkcie.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie „kiedy granica funkcji w punkcie istnieje”?
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje znajdujący się w sekcji „Przeczytaj” wykres funkcji, która nie jest ciągła w określonych punktach.
2. Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela: Jak zachowuje się funkcja w punktach o odciętej a, b, c, d?
3. Nauczyciel wprowadza pojęcie ciągłości funkcji w punkcie, podaje definicję ciągłości funkcji w punkcie.
4. Uczniowie interpretują treść definicji funkcji w punkcie oraz układają schemat jej stosowania.
5. Uczniowie w parach badają ciągłość funkcji zaproponowanych przez nauczyciela.
6. Nauczyciel prezentuje film samouczek i omawia go z uczniami, następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania pod filmem.
7. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

8. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Uczniowie odpowiadają na pytanie: Jak zbadać ciągłość funkcji w punkcie? Robią stosowną notatkę w zeszycie.
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest wykonanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- Związek pochodnej z ciągłością funkcji
- Granica ciągu nieskończonego

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.