

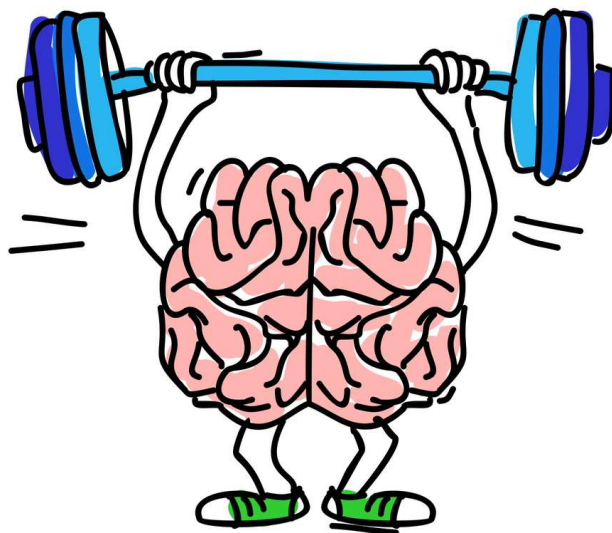


## Rozwiązywanie równań z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

## Rozwiązywanie równań z wartością bezwzględną

Źródło: Alois Komenda, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.



„Trening czyni mistrza”.

To znane przysłowie sprawdza się również w nauce. Równania z wartością bezwzględną pojawiają się w różnych działach matematyki. Dlatego warto trenować ich rozwiązywanie,

poznawać nowe trudniejsze typy równań. Wtedy żadne równanie nie będzie dla ciebie straszne. Trzeba tylko sumiennie ćwiczyć.

A zatem rozpoczynamy trening.

### Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać równania, w których występuje więcej niż jedna wartość bezwzględna.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania równań z wartością bezwzględną.

# Przeczytaj

---

Wiesz już, jak rozwiązać równanie z wartością bezwzględną. Wykorzystaj posiadane umiejętności przy rozwiązywaniu prostszych równań.

Zapoznaj się z przykładami. Zwróć uwagę na metody rozwiązywania równań, które zostały w nich zaprezentowane.

## Przykład 1

Rozwiążemy równanie.

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 5$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem zapisujemy w postaci kwadratu różnicy, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$\sqrt{(2x - 3)^2} = 5$$

Przypomnijmy własność wartości bezwzględnej

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Możemy więc zapisać nasze równanie w postaci

$$|2x - 3| = 5$$

Wykorzystujemy poznane wcześniej metody rozwiązywania równań

$$2x - 3 = 5 \text{ lub } 2x - 3 = -5$$

$$2x = 8 \quad | : 2 \text{ lub } 2x = -2 \quad | : 2$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -1$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-1, 4\}$ .

## Przykład 2

Rozwiążemy równanie.

$$|1 + |x - 2|| = 4$$

Usuujemy najpierw zewnętrzny moduł. Korzystając z poznanych już metod, wiemy, że w tym przypadku, liczba pod modułem musi być równa 4 lub  $-4$ .

A zatem

$$(*) 1 + |x - 2| = 4 \text{ lub } (**) 1 + |x - 2| = -4$$

Zacznijmy od rozwiązania równania (\*).

$$1 + |x - 2| = 4$$

$$|x - 2| = 3$$

$$x - 2 = 3 \text{ lub } x - 2 = -3$$

$$x = 5 \text{ lub } x = -1$$

Teraz zajmiemy się równaniem (\*\*).

$$1 + |x - 2| = -4$$

$$|x - 2| = -4 - 1$$

$$|x - 2| = -5$$

Otrzymaliśmy **równanie sprzeczne**.

A zatem pierwiastki równania  $|1 + |x - 2|| = 4$ , to

$$x = -1 \text{ lub } x = 5.$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-1, 5\}$ .

### Przykład 3

Rozwiążemy równanie.

$$|x - 5| = |x + 2|$$

Rozwiązując takie równanie możemy skorzystać z twierdzenia

$$\boxed{|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ lub } a = -b}$$

A zatem

$$x - 5 = x + 2 \text{ lub } x - 5 = -(x + 2)$$

$$-5 = 2 \text{ lub } x - 5 = -x - 2$$

**równanie sprzeczne** lub  $x + x = -2 + 5$

$$2x = 3 \quad |: 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Równanie ma tylko jeden pierwiastek  $x = \frac{3}{2}$ .

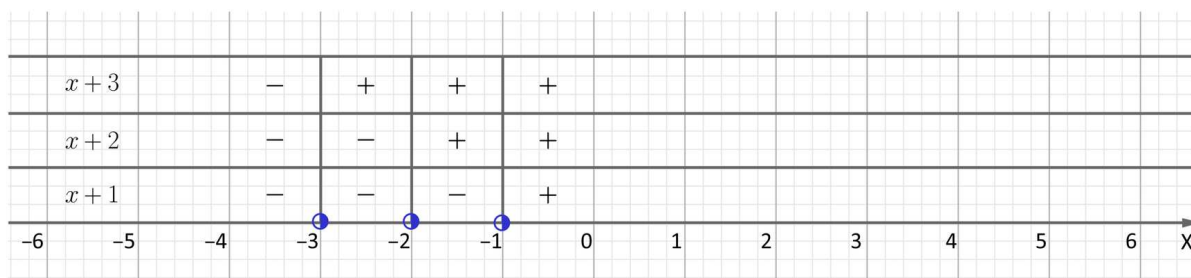
**Odpowiedź:**  $x \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ .

#### Przykład 4

Rozwiążemy równanie.

$$|x + 3| + |x + 2| - |x + 1| = 10$$

Rozwiązując równanie, w którym pojawiły się trzy moduły, postępujemy analogicznie jak przy podobnych równaniach z dwoma wartościami bezwzględnymi.



Jak można wyczytać z rysunku, są cztery przedziały, w których musimy rozważyć znaki wyrażeń pod modułami.

A zatem

1. dla  $x \in (-\infty, -3)$  mamy

$$(-x - 3) + (-x - 2) - (-x - 1) = 10$$

$$-x - 3 - x - 2 + x + 1 = 10$$

$$-x = 14 \quad | : (-1)$$

$$\underline{x = -14 \in (-\infty, -3)}$$

2. dla  $x \in \langle -3, -2 \rangle$  mamy

$$(x + 3) + (-x - 2) - (-x - 1) = 10$$

$$x + 3 - x - 2 + x + 1 = 10$$

$$x = 8 \notin \langle -3, -2 \rangle$$

3. dla  $x \in \langle -2, -1 \rangle$  mamy

$$(x + 3) + (x + 2) - (-x - 1) = 10$$

$$x + 3 + x + 2 + x + 1 = 10$$

$$3x = 4 \quad | : 3$$

$$x = \frac{4}{3} \notin \langle -2, -1 \rangle$$

4. dla  $x \in \langle -1, \infty \rangle$  mamy

$$(x + 3) + (x + 2) - (x + 1) = 10$$

$$x + 3 + x + 2 - x - 1 = 10$$

$$\underline{x = 6 \in \langle -1, \infty \rangle}$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-14, 6\}$ .

### Przykład 5

Rozwiążemy równanie.

$$|x + 2| - |x^2 - 4| = 0$$

Zauważmy, że wyrażenie pod drugim modulem możemy zapisać w postaci iloczynu sumy i różnicy dwóch wyrażeń, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$|x + 2| - |(x + 2)(x - 2)| = 0$$

Skorzystajmy z poznanej własności wartości bezwzględnej

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

$$|x + 2| - |x + 2| \cdot |x - 2| = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias

$$|x + 2| \cdot [1 - |x - 2|] = 0$$

A zatem

$$|x + 2| = 0 \text{ lub } 1 - |x - 2| = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ lub } -|x - 2| = -1$$

$$\underline{x = -2} \text{ lub } |x - 2| = 1$$

Pozbywamy się modułu:

$$x - 2 = 1 \text{ lub } x - 2 = -1$$

$$\underline{x = 3} \text{ lub } \underline{x = 1}$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-2, 1, 3\}$ .

## Słownik

równanie sprzeczne

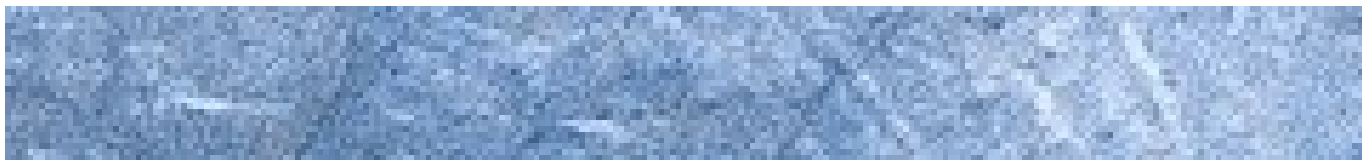
równanie, które nie posiada rozwiązania, co zapisujemy  $x \in \emptyset$

# Test samosprawdzający

---

## Polecenie 1

Rozwiąż test i sprawdź swoją sprawność w rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną.



Test

## Równania z wartością bezwzględną

Sprawdzisz:

- swoją wiedzę na temat równań z wartością bezwzględną;
- swoją sprawność w rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

10 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

## Polecenie 2

Rozwiąż równanie  $|x - 3| + |x - 4| = 5$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie.

$$|x + 1| - |x^2 - 1| = 0$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Wojciechowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Rozwiązywanie równań z wartością bezwzględną

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu:  $|x + 4| = 5$ ,  $|x - 2| < 3$ ,  $|x + 3| \geq 4$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej  $a$
- korzysta z własności modułu
- rozwiązuje równania z wartością bezwzględną

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego
- konkurs zadaniowy – gra edukacyjna

## **Formy pracy:**

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego
- praca indywidualna

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają metody rozwiązywania równań z wartością bezwzględną poznane na poprzedniej lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują zadania zawarte w teście samosprawdzającym. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszytach, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą test bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.
4. Uczniowie, pracując w parach, wykonują ćwiczenia interaktywne.

### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania. Wspólnie znajdują rozwiązanie problemów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel nagradza ocenami uczniów, którzy wykonali polecenia 1 i 2 poprawnie.

### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują pozostałe ćwiczenia.

### **Materiały pomocnicze:**

## **E-podręcznik z matematyki**

### **Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą wykorzystać przykłady zawarte w części „Przeczytaj” do utrwalenia informacji po lekcji i pomoc przy odrabianiu pracy domowej.