



Określanie liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wykorzystaniem metody wyznacnikowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Określanie liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wykorzystaniem metody wyznacznikowej

$$2x_3 - 3x_4 = 13$$

Źródło: Antoine Dautry, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi charakteryzuje się tym, że po obliczeniu wartości liczb, zwanych wyznacznikami danego układu równań, możemy podać liczbę rozwiązań takiego układu. W przypadku, gdy układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie, możemy je znaleźć, stosując gotowe już wzory podane w 1750 r. przez Gabriela Cramera.

W tym materiale zajmiemy się właśnie zastosowaniem metody wyznacznikowej przy określaniu liczby rozwiązań danego układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Znajomość tej metody nie jest obowiązkowa (wykracza poza podstawę programową), ale jest to metoda przyjemna i łatwa, więc warto ją poznać.



Gabriel Cramer – szwajcarski matematyk i fizyk, profesor Uniwersytetu w Genewie

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Obliczysz wartości wyznaczników.
- Korzystając z algorytmu rozwiązywania układu równań metodą wyznacznikową określisz, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.
- Rozwiążesz układ równań liniowych metodą wyznacznikową.
- Korzystając z metody wyznacznikowej określisz, kiedy układ równań z parametrem jest układem oznaczonym, nieoznaczonym, a kiedy sprzecznym.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw definicję układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}'$$

gdzie:

x oraz y – oznaczają niewiadome,

a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych x oraz y ,

c_1 i c_2 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Zbiór rozwiązań układu równań liniowych

Zbiorem rozwiązań układu równań jest zbiór wszystkich par liczb spełniających dany układ równań. **Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi** może mieć dokładnie jedno rozwiązanie, może posiadać nieskończenie wiele rozwiązań, może też nie mieć rozwiązań.

Definicja: Układ równań oznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb, nazywamy układem oznaczonym.

Definicja: Układ równań nieoznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb, nazywamy układem nieoznaczonym.

Definicja: Układ równań sprzeczny

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie posiada rozwiązań, nazywamy układem sprzecznym.

Aby rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

metodą wyznacznikową, musimy obliczyć trzy liczby:

- wyznacznik główny W – utworzony ze współczynników znajdujących się przy niewiadomych x i y .

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewidomej x oznaczany W_x – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej x , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewidomej y oznaczany W_y – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej y , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Jeśli wyznacznik główny $W \neq 0$, to taki układ równań nazywamy układem Cramera.

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest **oznaczony**), które możemy wyznaczyć za pomocą wzorów Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} \text{ i } y = \frac{W_y}{W}$$

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$, to układ równań ma **nieskończenie wiele rozwiązań** (jest **nieoznaczony**).

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ równań **nie ma rozwiązań** (jest **sprzeczny**).

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Zapisujemy i obliczamy wyznacznik główny.

Wypisujemy w odpowiednich kolumnach współczynniki znajdujące się przy niewiadomych x oraz y .

$$W = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 = 6 - 20 = -14$$

Wyznacznik główny jest liczbą różną od zera, wiemy już więc, że jest to oznaczony układ równań.

Zapisujemy teraz i obliczamy **wyznacznik** niewiadomej x .

W pierwszej kolumnie wyznacznika głównego zastępujemy współczynniki znajdujące się przy niewiadomej x , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 28 = -37$$

Zapisujemy i obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

W drugiej kolumnie wyznacznika głównego zastępujemy współczynniki znajdujące się przy niewiadomej y , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_y = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W_y = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 - 15 = -29$$

Ponieważ wyznacznik główny jest różny od zera, więc możemy wykorzystać wzory Cramera do wyznaczenia rozwiązania tego układu.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-37}{-14} = 2\frac{9}{14}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-29}{-14} = 2\frac{1}{14}$$

A zatem rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 2\frac{9}{14} \\ y = 2\frac{1}{14} \end{cases}$.

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 1,5x - 2y = 2,5 \\ -9x + 12y = -15 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 1,5 & -2 \\ -9 & 12 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} 2,5 & -2 \\ -15 & 12 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 1,5 & 2,5 \\ -9 & -15 \end{vmatrix} = -22,5 + 22,5 = 0$$

$$W = 0 \text{ i } W_x = 0 \text{ i } W_y = 0$$

A zatem jest to układ równań **nieoznaczony**.

Układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$.

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 4y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 15 = 9$$

$$W = 0 \text{ i } (W_x \neq 0 \text{ oraz } W_y \neq 0)$$

A zatem ten układ równań jest sprzeczny i nie posiada rozwiązań.

Wygodnie jest korzystać z metody wyznacznikowej, gdy w układzie równań pojawiają się parametry. Pozwala ona łatwo ustalić liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów.

Przykład 4

Określmy, dla jakiego parametru m , układ równań $\begin{cases} mx + 4y = m + 1 \\ x + my = m + 2 \end{cases}$ jest układem oznaczonym.

Obliczamy wyznacznik główny

$$W = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Aby układ był oznaczony, jego wyznacznik główny musi być liczbą różną od zera.

Wyznamy więc takie wartości parametru m , dla których zachodzi taki warunek.

$$W \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \wedge m \neq 2$$

Możemy wyznaczyć postać liczb będących jego rozwiązaniem.

Obliczmy wyznaczniki niewiadomych x oraz y .

$$W_x = \begin{vmatrix} m + 1 & 4 \\ m + 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 4m - 8 = m^2 - 3m - 8$$

$$W_y = \begin{vmatrix} m & m + 1 \\ 1 & m + 2 \end{vmatrix} = m^2 + 2m - m - 1 = m^2 + m - 1$$

A następnie podajemy postać niewiadomych x i y .

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m^2 - 3m - 8}{m^2 - 4} \\ y = \frac{m^2 + m - 1}{m^2 - 4} \end{cases}$$

A zatem ten układ równań jest oznaczony dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ i posiada wtedy rozwiązanie postaci

$$\begin{cases} x = \frac{m^2 - 3m - 8}{m^2 - 4} \\ y = \frac{m^2 + m - 1}{m^2 - 4} \end{cases}.$$

Przykład 5

Określmy liczbę rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{cases} -2x + py = p \\ 2px - y = -p \end{cases}$$

w zależności od parametru p .

Wyznamy wyznacznik główny oraz wyznaczniki niewiadomych W_x i W_y .

$$W = \begin{vmatrix} -2 & p \\ 2p & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2p^2$$

$$W_x = \begin{vmatrix} p & p \\ -p & -1 \end{vmatrix} = -p + p^2$$

$$W_y = \begin{vmatrix} -2 & p \\ 2p & -p \end{vmatrix} = 2p - 2p^2$$

Obliczamy, dla jakich wartości parametru p , wyznacznik główny jest równy zero.

$$W = 0 \Leftrightarrow 2 - 2p^2 = 0 \Leftrightarrow 2(1 + p)(1 - p) = 0 \Leftrightarrow p = -1 \vee p = 1$$

Obliczamy wartości wyznaczników W_x i W_y dla parametrów $p \in \{-1, 1\}$.

Dla $p = -1$ otrzymujemy:

$$W_x = -p + p^2 = 1 + 1 = 2$$

$$W_y = 2p - 2p^2 = -2 - 2 = -4$$

A zatem dla $p = -1$ układ jest **sprzeczny**.

Dla $p = 1$ otrzymujemy:

$$W_x = -p + p^2 = -1 + 1 = 0$$

$$W_y = 2p - 2p^2 = 2 - 2 = 0$$

Więc dla $p = 1$ układ jest nieoznaczony.

Dla $p \neq -1$ i $p \neq 1$ układ jest **oznaczony**. Wyznamy niewiadome x i y .

Korzystamy z poznanych wzorów i doprowadzamy wyrażenia do najprostszej postaci.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-p + p^2}{2 - 2p^2} = \frac{-p(1-p)}{2(1-p)(1+p)} = \frac{-p}{2(1+p)} = -\frac{p}{2+2p}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{2p - 2p^2}{2 - 2p^2} = \frac{2p(1-p)}{2(1-p)(1+p)} = \frac{p}{1+p}$$

Podsumujmy nasze rozważania.

$$\text{Układ równań } \begin{cases} -2x + py = p \\ 2py - y = -p \end{cases}$$

- dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ jest oznaczony i posiada wtedy dokładnie jedno rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{2+2p} \\ y = \frac{p}{1+p} \end{cases},$$

- dla $p = -1$ jest sprzeczny,
- dla $p = 1$ jest nieoznaczony.

Przykład 6

Wyznacz, dla jakich parametrów $k \in \mathbb{R}$, rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} (k-1)x + 3y = 3 \\ (k+3)x - 5y = 8 \end{cases} \text{ jest para liczb rzeczywistych, których suma jest niedodatnia.}$$

Obliczamy wyznacznik główny W .

$$W = \begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ k+3 & -5 \end{vmatrix} = -5k + 5 - 3k - 9 = -8k - 4$$

Aby układ posiadał jedno rozwiązanie, [wyznacznik](#) musi być różny od zera.

Ten układ jest oznaczony dla $-8k - 4 \neq 0$, czyli $k \neq -\frac{1}{2}$.

Obliczmy wyznaczniki niewiadomych x oraz y .

$$W_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 24 = -39$$

$$W_y = \begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ k+3 & 8 \end{vmatrix} = 8k - 8 - 3k - 9 = 5k - 17$$

Wtedy

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-39}{-8k-4}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{5k-17}{-8k-4}$$

Wyznaczmy sumę liczb x i y .

$$x + y = \frac{-39}{-8k-4} + \frac{5k-17}{-8k-4} = \frac{-39+5k-17}{-8k-4} = \frac{5k-56}{-8k-4} = \frac{56-5k}{8k+4}$$

Otrzymane wyrażenie będzie przyjmować wartości niedodatnie dla k spełniającego warunki:

$$\begin{cases} 56 - 5k \geq 0 \\ 8k + 4 < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 56 - 5k \leq 0 \\ 8k + 4 > 0 \end{cases}.$$

Wyznaczamy rozwiązanie pierwszego układu nierówności.

$$\begin{cases} 56 - 5k \geq 0 \\ 8k + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5k \geq -56 \quad | : (-5) \\ 8k < -4 \quad | : 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \leq 11,2 \\ k < -0,5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu nierówności są liczby z przedziału $k \in (-\infty; -0,5)$.

Wyznaczamy rozwiązanie drugiego układu nierówności.

$$\begin{cases} 56 - 5k \leq 0 \\ 8k + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5k \leq -56 \quad | : (-5) \\ 8k > -4 \quad | : 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \geq 11,2 \\ k > -0,5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu są liczby z przedziału $k \in \langle 11,2; \infty \rangle$.

A zatem suma liczb będących rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (k-1)x + 3y = 3 \\ (k+3)x - 5y = 8 \end{cases}$ jest niedodatnia dla $k \in (-\infty; -0,5) \cup \langle 11,2; \infty \rangle$.

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

zbiór rozwiązań układu równań

zbiór wszystkich par liczb spełniających dany układ równań

układ równań oznaczony

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb

układ równań nieoznaczony

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb

układ równań sprzeczny

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie posiada rozwiązań
wyznacznik

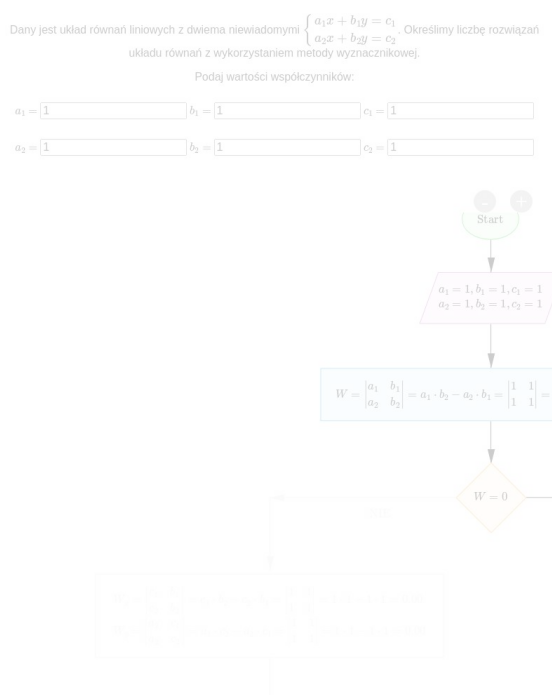
liczba postaci $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym przedstawiającym zasadę określania liczby rozwiązań układu równań z wykorzystaniem metody wyznaczkowej. Wyznacz według tej instrukcji liczbę rozwiązań układów przedstawionych w Poleceniu 2.

Aby zobaczyć rozwiązanie, przesunij poniższy schemat myszką lub skorzystaj z przycisków „-” i „+”.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dkv4pRPMM>

Polecenie 2

Zbadaj liczbę rozwiązań układów równań. Jeśli rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb, wyznacz ją.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 10y = 15 \\ -2x - 4y = 6 \end{cases},$$



$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 15y = 10 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} 15x - 10y = 5 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}.$$

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm przedstawiający zasadę określania liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ z wykorzystaniem metody wyznaczkowej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Rozwiąż układ równań metodą wyznacznikową i określ liczbę jego rozwiązań w zależności od parametru a .

$$\begin{cases} a^3x + ay = 3a^2 \\ 4x + y = 6 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań metodą wyznacznikową i określ liczbę jego rozwiązań w zależności od parametrów p i q .

$$\begin{cases} (p - 1)x + 2qy = 10 \\ 3px + 6(q + 2)y = 30 \end{cases}$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi, korzystając z metody wyznaczkowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- oblicza wartości wyznaczników stopnia drugiego
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą wyznaczkową
- rozpoznaje układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne oraz ich interpretację geometryczną
- określa liczbę rozwiązań układu równań w zależności od danego parametru
- tworzy i wykorzystuje algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają informacje dotyczące układów równań i ich rodzajów w zależności od liczby rozwiązań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i „Schemat interaktywny”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają schemat interaktywny i konsultują wykonanie umieszczonego pod nim polecenia.
4. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszytach, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą zadania bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Układ równań liniowych](#)
- [Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową w arkuszu kalkulacyjnym](#)

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystany przez uczniów do powtórzenia wiadomości z lekcji oraz utrwalenia jednej z metod określania liczby rozwiązań układu równań liniowych. Można wykorzystać go, rozwiązując zadania tekstowe na układy równań.