



Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach arytmetycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach arytmetycznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Związek między ciągiem arytmetycznym a niektórymi rodzajami liczb od wieków był przedmiotem badań najwybitniejszych matematyków.

Szczególnie intrygowały ich liczby pierwsze, dla których próbowano znaleźć formułę, ustawiającą je w ciąg arytmetyczny. W 2019 r. znaleziono ciąg arytmetycznych, którego pierwszych 27 wyrazów składa się z liczb pierwszych.

W tym materiale pokażemy, jak własności ciągu arytmetycznego można wykorzystać w zadaniach arytmetycznych, w tym w zadaniach o liczbach pierwszych.

A może Tobie, po przeanalizowaniu treści zawartych w tym materiale, uda się sformułować własne obserwacje dotyczące zależności między ciągiem arytmetycznym, a liczbami pierwszymi? Możesz przy tym skorzystać z poniższej tablicy liczb pierwszych, mniejszych od 152.

0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144
1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145
2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146
3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148
5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149
6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150
7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151
8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152

Twoje cele

- Powtórzysz i rozwiniesz umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych.
- Zastosujesz w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym.
- Zbudujesz model matematyczny problem związanego z liczbami rzeczywistymi, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie najważniejszych wzorów dotyczących ciągu arytmetycznego, z których będziemy korzystać.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n) , jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia w 1837 roku udowodnił twierdzenie, które dzisiaj nazywamy twierdzeniem Dirichleta o liczbach pierwszych w ciągu arytmetycznym.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, autor twierdzenia
Źródło: dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

Twierdzenie: Twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w ciągu arytmetycznym

Jeżeli liczby naturalne a i r są względnie pierwsze, to ciąg arytmetyczny

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Konsekwencją tego twierdzenia jest wiele ciekawych wniosków:

- Jeżeli w ciągu Dirichleta pewien wyraz jest k -tą potęgą liczby naturalnej, to ciąg ten zawiera nieskończenie wiele k -tych potęg liczb pierwszych.
- Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$ ciąg arytmetyczny $1, 1 + r, 1 + 2r, 1 + 3r, \dots$ zawiera nieskończenie wiele k -tych potęg liczb pierwszych.
- Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których zapis dziesiętny kończy się na $11 \dots 1, 33 \dots 3, 77 \dots 7, 99 \dots 9$.

Przykład 1

W tablicy zapisano przykłady ciągów liczb pierwszych tworzących ciąg arytmetyczny czterowyrazowy.

Różnica ciągu	Ciąg arytmetyczny
6	(11, 17, 23, 29)
6	(41, 47, 53, 59)
12	(7, 19, 31, 43)
18	(5, 23, 41, 59)
30	(13, 43, 73, 103)

Przykład 2

Liczby zapisane w kwadracie, to liczby pierwsze. Tworzą one ciąg arytmetyczny czterowyrazowy odpowiednio w każdym wierszu i w każdej kolumnie.

Liczby pierwsze tworzące ciąg arytmetyczny			
83	131	179	277
251	257	263	269
419	383	347	311
587	509	431	353

Teraz podamy przykłady zastosowania wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykład 3

Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 100.

Liczby nieparzyste $1, 3, 5, \dots, 99$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 2$ i pierwszym wyrazie $a = 1$.

Najpierw określimy ile liczb należy dodać. Skorzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego. Stąd:

$$99 = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$98 = 2n - 2$$

$$n = 50$$

Wyznaczamy teraz szukaną sumę.

$$S = \frac{1+99}{2} \cdot 50$$

$$S = 2500$$

Odpowiedź:

Suma wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 100 jest równa 2500.

Przykład 4

Obliczymy sumę stu początkowych liczb naturalnych, które w dzieleniu przez 7 dają resztę 1.

Liczba naturalna, która w dzieleniu przez 7 daje resztę 1, jest postaci $7t + 1$, gdzie t jest liczbą naturalną. Liczby te tworzą **ciąg arytmetyczny**, którego pierwszy wyraz $a = 1$, a różnica jest równa 7. Obliczymy setny wyraz tego ciągu.

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 7$$

$$a_{100} = 1 + 693 = 694$$

Wyznaczamy sumę 100 wyrazów ciągu.

$$S = \frac{1+694}{2} \cdot 100$$

$$S = 34750$$

Odpowiedź:

Suma stu początkowych liczb naturalnych, które w dzieleniu przez 7 dają resztę 1 jest równa 34750.

Własności ciągu arytmetycznego można wykorzystać do powtórzenia wiadomości o logarytmach.

Przykład 5

Obliczymy, dla jakich wartości x liczby $\log 2$, $\log(2^x - 1)$, $\log(2^x + 3)$ w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny.

Z definicji logarytmu wynika, że

$$2^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ i}$$

$$2^x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Z tego wynika, że podane liczby utworzą ciąg arytmetyczny, gdy $x > 0$.

Z własności wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że

$$\log(2^x + 3) - \log(2^x - 1) = \log(2^x - 1) - \log 2$$

Różnica logarytmów jest równa logarytmowi ilorazu, zatem

$$\log \frac{2^x+3}{2^x-1} = \log \frac{2^x-1}{2}$$

Z różnowartościowości funkcji logarytmicznej wynika, że

$$\frac{2^x+3}{2^x-1} = \frac{2^x-1}{2}$$

Przekształcamy otrzymane równanie, podstawiając $2^x = t$, $t > 0$.

$$\frac{t+3}{t-1} = \frac{t-1}{2}$$

$$t^2 - 2t + 1 = 2t + 6$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = 16 + 20 = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

$$t_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \text{ - nie spełnia warunków zadania, bo } t_1 < 0$$

$$t_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

Stąd

$$2^x = 5$$

$$x = \log_2 5$$

Otrzymana liczba jest dodatnia, zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź:

Podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, gdy $x = \log_2 5$.

Przykład 6

Logarytmy dziesiętne trzech liczb x, y, z tworzą, w tej kolejności, [ciąg arytmetyczny](#). Suma odwrotności tych liczb jest równa 39, a suma kwadratów odwrotności tych liczb jest równa 819. Znajdź te liczby.

Liczby: $\log x, \log y, \log z$ tworzą ciąg arytmetyczny – z definicji logarytmu wynika, że $x > 0, y > 0, z > 0$.

Z własności trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że

$$\log y = \frac{\log x + \log z}{2}$$

$$2 \log y = \log x + \log z$$

Teraz korzystamy z własności logarytmu potęgi i logarytmu iloczynu.

$$\log y^2 = \log(xz)$$

Z różnowartościowości funkcji logarytmicznej wynika, że

$$y^2 = xz$$

Zapisujemy równanie wynikające z tego, że suma odwrotności liczb x, y, z jest równa 39.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 39$$

Teraz zapisujemy równanie wynikające z tego, że suma kwadratów odwrotności liczb x, y, z jest równa 819.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 819$$

Oznaczamy:

$$a = \frac{1}{x},$$

$$b = \frac{1}{y},$$

$$c = \frac{1}{z}.$$

Otrzymujemy w ten sposób układ równań:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 819 \end{cases}$$

Aby rozwiązać ten układ, podnosimy do kwadratu drugie z równań (liczby a , b , c są dodatnie).

$$(a + b + c)^2 = 1521$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1521$$

Do otrzymanego równania podstawiamy za $a^2 + b^2 + c^2$ liczbę 819, a za wyrażenie ac liczbę b^2 .

$$819 + 2ab + 2bc + 2b^2 = 1521$$

Z otrzymanego równania wyznaczamy b .

$$2b(a + b + c) = 702$$

$$2b \cdot 39 = 702$$

$$b = 9$$

Podstawiamy za b wyznaczoną liczbę do pierwszych dwóch równań układu.

$$\begin{cases} 81 = ac \\ a + 9 + c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 30 - c \\ (30 - c)c = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 30 - c \\ c^2 - 30c + 81 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego z równań układu wyznaczamy c .

$$\Delta = 576$$

$$c = 3 \text{ lub } c = 27$$

Jeśli $c = 3$ to $a = 27$ i $x = \frac{1}{27}$, $y = \frac{1}{9}$, $z = \frac{1}{3}$.

Jeśli $c = 27$ to $a = 3$ i $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{9}$, $z = \frac{1}{27}$.

Znalezione liczby x , y , z są dodatnie, spełniają więc warunki zadania.

Odpowiedź:

Szukane liczby to $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać zapisane tam zadania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8lOYFS5c>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania własności ciągu arytmetycznego.

Polecenie 2

Znajdź liczbę a spełniającą warunek $2 + 6 + 10 + 14 + \dots + a = 242$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest równa:

☐ 5450

☐ 4950

☐ 4805

☐ 4905

Ćwiczenie 2



Suma $11 + 13 + 15 + \dots$ jest równa 2475. Ile liczb dodano? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 45

☐ 99

☐ 90

☐ 50

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Dane są liczby dwucyfrowe, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3.

☐ Suma tych liczb dwucyfrowych jest większa od 1700.

☐ Liczby, które w dzieleniu przez trzy dają resztę dwa (nie tylko dwucyfrowe) mają postać $3t + 2$, gdzie $t \in \mathbb{N}$.

☐ Największa z tych liczb dwucyfrowych to 95.

☐ Jest 30 takich liczb dwucyfrowych.

Ćwiczenie 5



Liczby naturalne $\log_4^2(11 - 5x) + 1$, $1 + \frac{1}{2}\log_4(11 - 5x)^3$, $\log_4 64$ są długościami boków trójkąta prostokątnego i jednocześnie liczby te tworzą ciąg arytmetyczny.

Uzupełnij obliczenia prowadzące do wyznaczenia obwodu tego trójkąta. Przeciągnij odpowiednie liczby w puste miejsca.

Z definicji logarytmu wynika, że $11 - 5x > 0$, zatem $x <$.

Z własności trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że:

$$\text{} + \log_4^2(11 - 5x) + 1 = 3 \log_4(11 - 5x) + 2$$

Oznaczmy: $t = \log_4(11 - 5x)$.

$$t^2 - 3t + \text{} = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$t = \text{} \text{ lub } t = 2$$

Wyznaczamy x .

$$\log_4(11 - 5x) = 1 \text{ lub } \log_4(11 - 5x) = 2$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ lub } x = \text{}$$

Jeśli $x = \frac{7}{5}$ to długości boków trójkąta są równe 2, $\frac{5}{2}$, . Liczby te nie spełniają warunków zadania, bo nie wszystkie są liczbami naturalnymi.

Jeśli $x =$ to długości boków trójkąta są równe 3, 4, i obwód trójkąta wynosi .

Ćwiczenie 6



Liczby 72 , $x - 2$, $-(x - 2)^3$ tworzą w tej kolejności ciąg arytmetyczny. Wykaż, że każda z tych liczb jest podzielna przez 2.

Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie tego zadania.

Kolejne wyrazy ciągu to: 72 , 4 , -64 .



Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki.



Wyznaczamy x .



Korzystamy z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



Każda z tych liczb jest wielokrotnością liczby 2, zatem jest podzielna przez 2.



$$(x - 6)(x^2 + 14) = 0$$



$$2(x - 2) = 72 - (x - 2)^3$$



Otrzymujemy równanie stopnia trzeciego.



$$x = 6$$



$$x^3 - 6x^2 + 14x - 84 = 0$$



Ćwiczenie 7



Liczby postaci $7 + 150n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, t$ tworzą ciąg arytmetyczny składający się z liczb pierwszych. Znajdź sumę tego ciągu.

Ćwiczenie 8



Oblicz, ile kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, poczynając od liczby 1 trzeba dodać, by otrzymać 289.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie własności ciągu geometrycznego w zadaniach arytmetycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- powtarza i rozwija umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych
- stosuje w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym
- buduje model matematyczny problemu związanego z liczbami rzeczywistymi, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące ciągu arytmetycznego, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z animacją. Najpierw próbują samodzielnie rozwiązać podany tam przykład, a następnie porównują z przedstawionym rozwiązaniem. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4-osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania, zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania, sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Kończącym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest samodzielne ułożenie i rozwiązanie dwóch zadań podobnych do tych, które były rozwiązywane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana na zajęciach pokazujących zastosowanie wzoru na sumę n – kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.