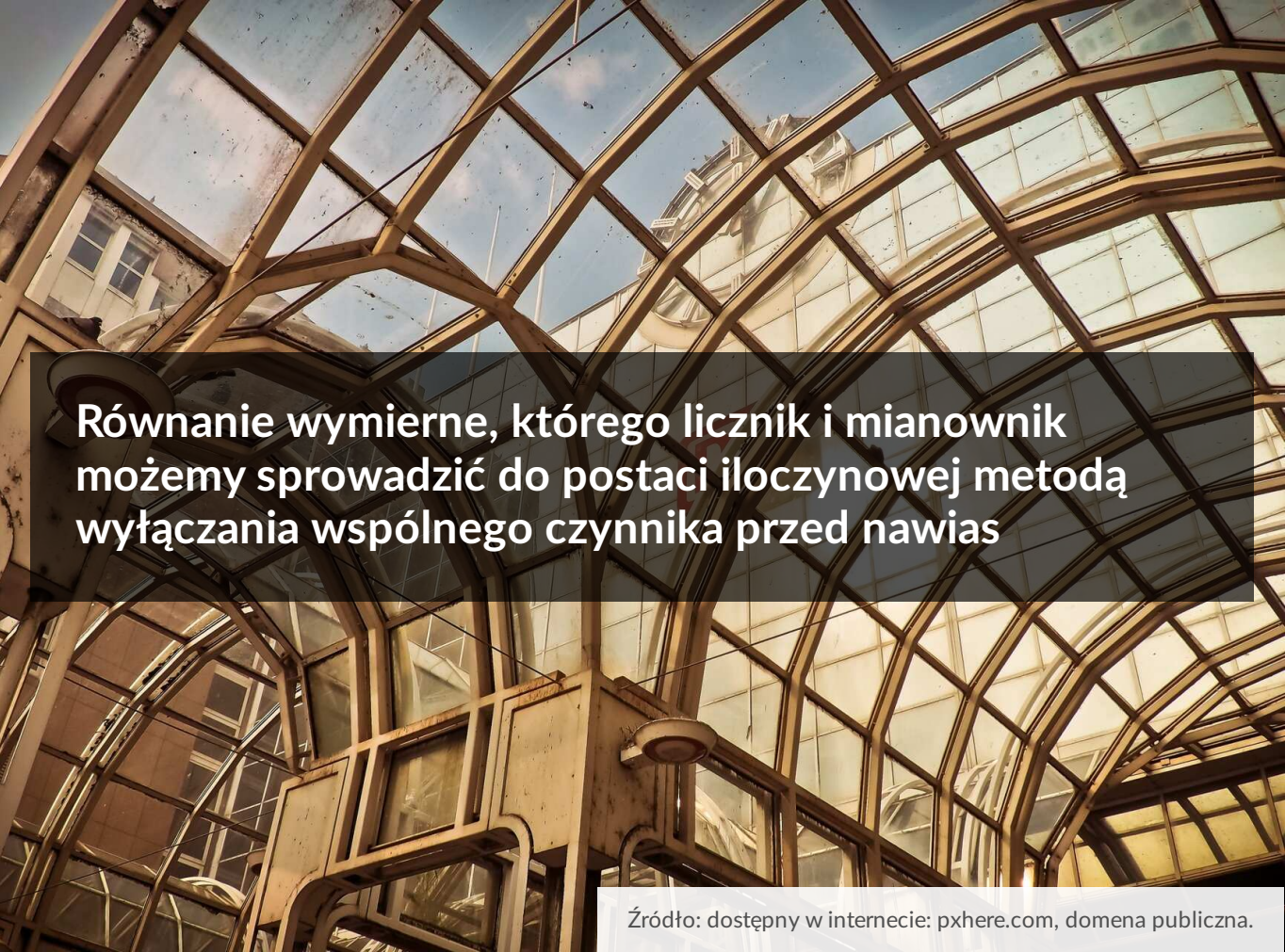




Równanie wymierne, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wymierne, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Aby rozwiązać równanie wymierne, dobrze jest licznik i mianownik tego równania zapisać w postaci iloczynowej. Jest to bardzo wygodna postać zarówno do wyznaczenia dziedziny równania, jak również do obliczenia pierwiastków równania.

Jedną z metod sprowadzania wielomianu do postaci iloczynowej jest metoda wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wymierne, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$), to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu $W(x)$, które nie są miejscami zerowymi wielomianu $P(x)$.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania równania wymiernego należy określić jego dziedzinę.

Dziedziną równia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Pokażemy przykłady rozwiązań równań wymiernych, w których licznik lub mianownik ułamka sprowadzimy do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Przykład 1

Rozwiążemy **równanie wymierne** $\frac{x^2-3x}{2x^2+4} = 0$.

Najpierw ustalimy dziedzinę równania.

$$2x^2 + 4 \neq 0$$

$$2x^2 \neq -4$$

$$x^2 \neq -2$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R}$$

Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias.

$$\frac{x(x-3)}{2 \cdot (x^2+2)} = 0$$

Przyrównujemy licznik ułamka do zera.

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

$$0 \in D, 3 \in D$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0, 3.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\frac{12x^4-3x^2}{3x^2+6x} = 0$.

Zapiśmy najpierw równanie w postaci równoważnej, wyłączając w liczniku i mianowniku ułamka algebraicznego wspólny czynnik przed nawias.

$$\frac{3x^2(4x^2-1)}{3x(x+2)} = 0$$

Dziedzinę równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Skracamy ułamek, dzieląc licznik i mianownik przez $3x$ ($x \neq 0$).

$$\frac{x(4x^2-1)}{x+2} = 0$$

Ułamek równa się zero jeżeli jego licznik równa się zero.

$$x(4x^2 - 1) = 0$$

$$x(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = -\frac{1}{2}$$

$$0 \notin D, \frac{1}{2} \in D, -\frac{1}{2} \in D$$

Równanie ma dwa rozwiązania $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\frac{(x+2)(x^2+1)}{x^3-4x} = \frac{x^2+x-2}{x^3-4x}$.

Zapiśmy równanie w postaci równoważnej.

$$\frac{(x+2)(x^2+1)}{x(x^2-4)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x^2-4)}$$

$$\frac{(x+2)(x^2+1)-(x+2)(x-1)}{x(x^2-4)} = 0$$

$$\frac{(x+2)(x^2+1-x+1)}{x(x^2-4)} = 0$$

$$x(x^2 - 4) \neq 0$$

$$x(x-2)(x+2) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

Przyrównujemy licznik ułamka algebraicznego do zera.

$$(x+2)(x^2-x+2) = 0$$

$$x+2=0 \text{ lub } x^2-x+2=0$$

$$x=-2 \text{ lub } \Delta = 1-8 = -7 < 0$$

$$-2 \notin D$$

Równanie nie posiada rozwiązań.

Przykład 4

$$\text{Rozwiążemy równanie } \frac{(2x^3-2x^2)(x+2)}{2x^3+8x^2+8x} = 1.$$

W pierwszym kroku zapiszemy licznik i mianownik ułamka w postaci iloczynowej.

$$\frac{2x^2(x-1)(x+2)}{2x(x^2+4x+4)} = 1$$

$$\frac{2x^2(x-1)(x+2)}{2x(x+2)^2} = 1$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Skracamy licznik i mianownik ułamka.

$$\frac{x(x-1)}{x+2} = 1$$

Korzystając z własności proporcji otrzymujemy:

$$x(x-1) = x+2$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \in D$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \in D$$

Rozwiązaniem równania są liczby $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $\frac{x^3+3x^2-2x-6}{x^3-5x^2-2x+10} = 2$.

Zapiszemy licznik i mianownik ułamka algebraicznego w postaci iloczynowej, łącząc wyrazy w pary i wyłączając wspólny czynnik.

$$\frac{x^2(x+3)-2 \cdot (x+3)}{x^2(x-5)-2 \cdot (x-5)} = 2$$

$$\frac{(x+3)(x^2-2)}{(x-5)(x^2-2)} = 2$$

Wyznamy dziedzinę równania.

$$(x-5)(x^2-2) \neq 0$$

$$(x-5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \neq 0$$

$$x \neq 5 \text{ i } x \neq \sqrt{2} \text{ i } x \neq -\sqrt{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5\}$$

Skracamy ułamek, dzieląc licznik i mianownik przez (x^2-2) .

$$\frac{x+3}{x-5} = 2$$

$$x+3 = 2 \cdot (x-5)$$

$$x+3 = 2x-10$$

$$-x = -13$$

$$x = 13 \in D$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 13$.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$)

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj sposoby rozwiązywania równania wymiernego.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgMGieK6Y>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący równań wymiernych i wyłączania czynnika przed nawias.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\frac{2x^4 - 32x^2}{x^4 - 8x^3 + 16x^2} = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiąż równanie $\frac{x^4-4x^2}{x^2+4x} = 0$.

☐ $x = -2, x = 2$

☐ $x = -4, x = -2, x = 2$

☐ $x = 0, x = 4$

☐ $x = 0, x = -2, x = 2$

Ćwiczenie 2



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie. Rozłóż licznik i mianownik równania $\frac{3x^5-6x^3}{\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}} = 0$ na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

$$\left[\boxed{} \cdot (x^2 - 2) \right] : \left[\sqrt{3} \cdot (x^2 - \boxed{}) \right] = 0$$

2

$2x^3$

$\sqrt{2}$

$3x^3$

x^2

$2x^2$

Ćwiczenie 3



Wskaż wszystkie równania równoważne równaniu $\frac{(x+1)(x^2-3)}{x^3+2x} = \frac{x^2-2x-3}{x^3+2x}$.

☐ $\frac{(x+1)(x^2+x)}{x^3+2x} = 0$

☐ $\frac{(x+1)(x^2-3)-(x+1)(x-3)}{x(x^2+2)} = 0$

☐ $\frac{(x+1)(x^2-x)}{x(x^2+2)} = 0$

☐ $\frac{(x+1)(x^2-x-6)}{x(x^2+2)} = 0$

Ćwiczenie 4



Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x^4-3x^2+2x}{5x^4-5x} = 0$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 2

☐ 3

☐ 1

☐ 0

Ćwiczenie 5



Połącz w pary równania z liczbami, które spełniają to równanie.

$$\frac{x^2-4x}{4x^2} = 0$$

$$x = 4$$

$$\frac{x^4-4x^2}{x^2+4} = 0$$

$$x = -2, x = 2$$

$$\frac{x^4-4x^2}{x^2} = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{x^4-4x^2}{x^2-4} = 0$$

$$x = -2, x = 0, x = 2$$

Ćwiczenie 6



Wpisz w wyznaczone miejsce w kolejności rosnącej liczby, które są rozwiązaniami równania

$$\frac{(x^3-6x^2)(x-4)}{x^3-12x^2+36x} = 1.$$

$$x = \boxed{}, x = \boxed{}$$

Ćwiczenie 7



Wybierz wszystkie liczby, które nie należą do dziedziny równania $\frac{x^3+\frac{1}{2}x^2-9x-\frac{9}{2}}{3x^3+4x^2-12x-16} = 0$.

☐ 3

☐ 2

☐ $-\frac{1}{2}$

☐ -3

☐ $-\frac{4}{3}$

☐ -2

Ćwiczenie 8



Przenieś w wyznaczone miejsce taki jednomian, aby rozwiązaniem uzyskanego równania były liczby $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$(10x^4 + \boxed{}) : (4x^2 + x) = 0$$

$$-x^2$$

$$2x^2$$

$$-5x^2$$

$$5x^2$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wymierne, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wymierne, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego, którego licznik i mianownik możemy sprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie sposobu doprowadzania wielomianów do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie przygotowany wcześniej przykład. Kolejna grupa dodaje swój przykład, itd. W ten sposób uczniowie przypominają metodę rozkładu wielomianu na czynniki.
2. Uczniowie analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w parach oglądają animację i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wyrażenia wymierne. Równania wymierne](#)
- [Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem. Animacja może być też wykorzystana na zajęciach pokazujących zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.