Monotoniczność ciągu liczbowego

Źródło: congerdesign on Pixnio, domena publiczna.

Monotoniczność kojarzy się z monotonią, ze smutkiem, jednostajnością. Tak ją postrzegają poeci i artyści.

> Monotonia
>
> Za jednym dniem drugi dzień – koleją jednostajną –
> nadchodzi i przemija, tej samej treści, barwy.
> I zdarzą się, i znów się zdarzą te same sprawy,
> chwile te same znajdują nas i porzucają.
>
> Tydzień przemija, a za nim – nowy tydzień.
> To, co się stanie, przewidzieć łatwo: cienie,
> światła te same, zawsze to samo brzemię.
> Jutro, które już wcale nie jest jutrem, znowu przyjdzie.
>
> Konstandinos Kawafis

Konstandinos Kawafis około 1900 r.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Cytat z Konstandinos Kawafis „*Wiersze zebrane*”, ResPublica, Warszawa, 1992

Dla matematyka monotoniczność to nie przygnębienie i apatia, ale ciekawa własność, związana z funkcjami, a więc i z ciągami liczbowymi. W tym materiale poznasz definicję ciągów monotonicznych i dowiesz się, jak takie ciągi rozpoznać.

Twoje cele

- Rozpoznasz ciąg monotoniczny.
- Określisz monotoniczność ciągu opisanego różnymi sposobami.
- Uzasadnisz, że dany ciąg nie jest monotoniczny.
- Wykorzystasz własności ciągów monotonicznych.

Przeczytaj

Przykład 1

Wypiszemy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = n^3 - 10$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

$a_1 = 1 - 10 = -9$

$a_2 = 8 - 10 = -2$

$a_3 = 27 - 10 = 17$

$a_4 = 64 - 10 = 54$

$a_5 = 125 - 10 = 115$

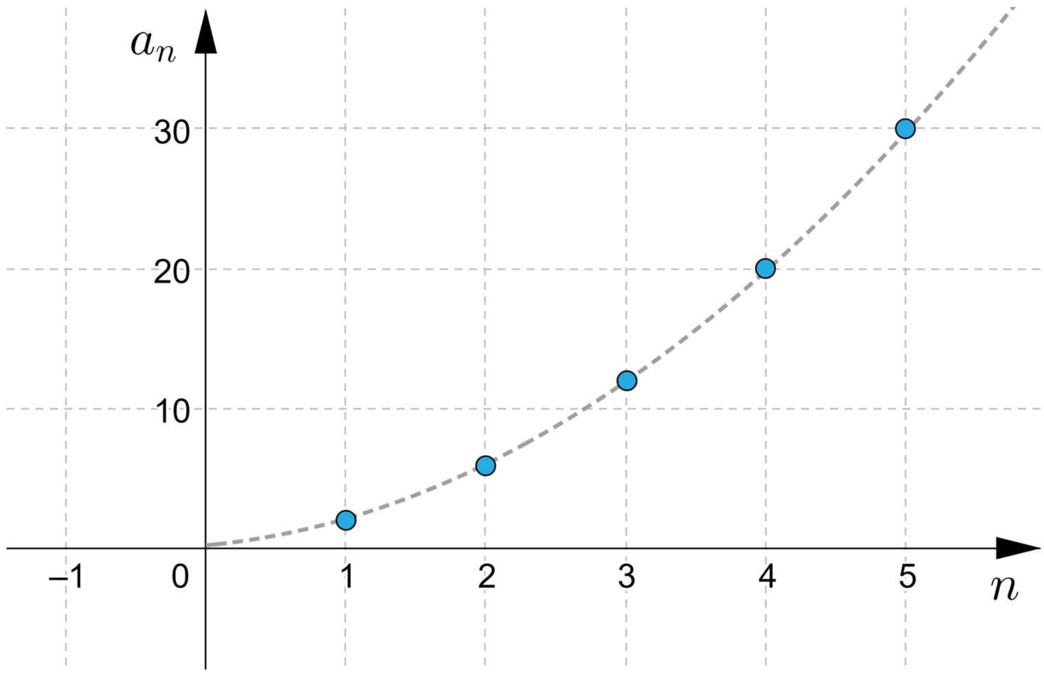
$a_6 = 216 - 10 = 206$

Zauważmy, że każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, czyli ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Definicja: Ciąg rosnący

Ciąg (a_n) nazywamy rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.



Przykład 2

Uzasadnimy, że ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 4n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest ciągiem rosnącym.

W tym celu określimy wyraz a_{n+1}.

$a_{n+1} = 4(n+1) - 1 = 4n + 3$

Zatem

$a_{n+1} = 4n + 3 = (4n - 1) + 4$

$a_{n+1} = a_n + 4$

$a_{n+1} > a_n$

c.n.d

Przykład 3

W tabelce zapisanych jest kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n).

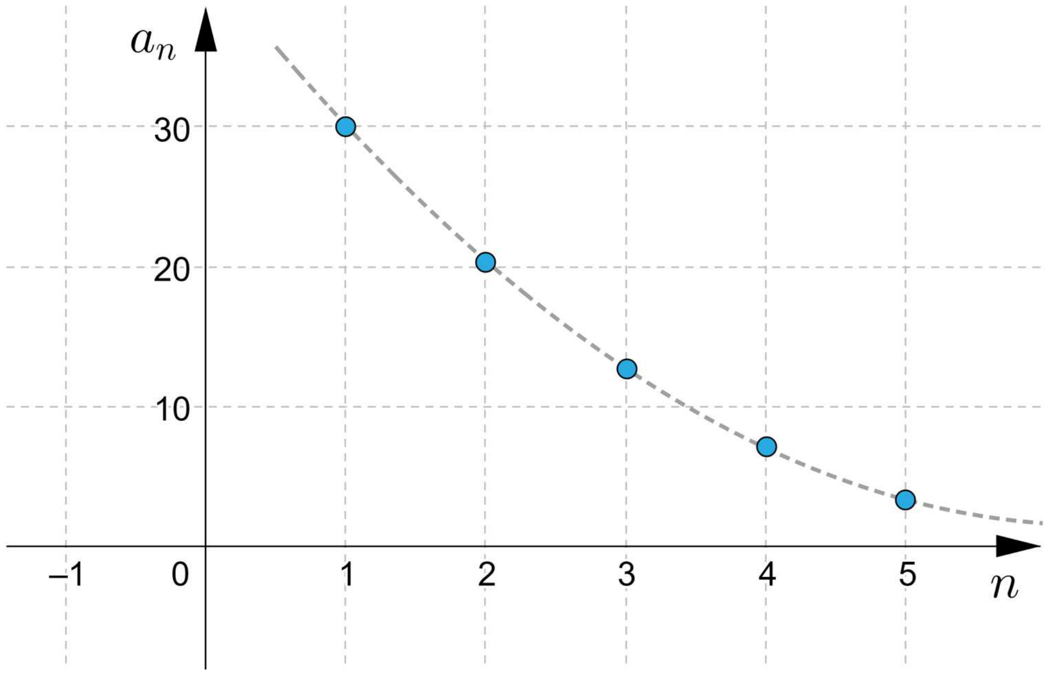
Początkowe wyrazy ciągu (a_n)					
n	1	2	3	4	5
a_n	18	15	12	9	6

Zauważmy, że każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

Definicja: Ciąg malejący

Ciąg (a_n) nazywamy malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.



Przykład 4

Uzasadnimy, że ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = -2n + 1$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest ciągiem malejącym.

W tym celu określimy wyraz a_{n+1}.

$a_{n+1} = -2(n + 1) + 1 = -2n - 1$

Zatem

$a_{n+1} = -2n - 1 = (-2n + 1) - 2$

$a_{n+1} = a_n - 2$

$a_{n+1} < a_n$

c.n.d

Przykład 5

Ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest malejący. Zbadamy monotoniczność ciągu (b_n) określonego wzorem $b_n = \frac{\sqrt{2+a_n^2}}{2}$.

Określamy zależność między wyrazami b_{n+1} i b_n.

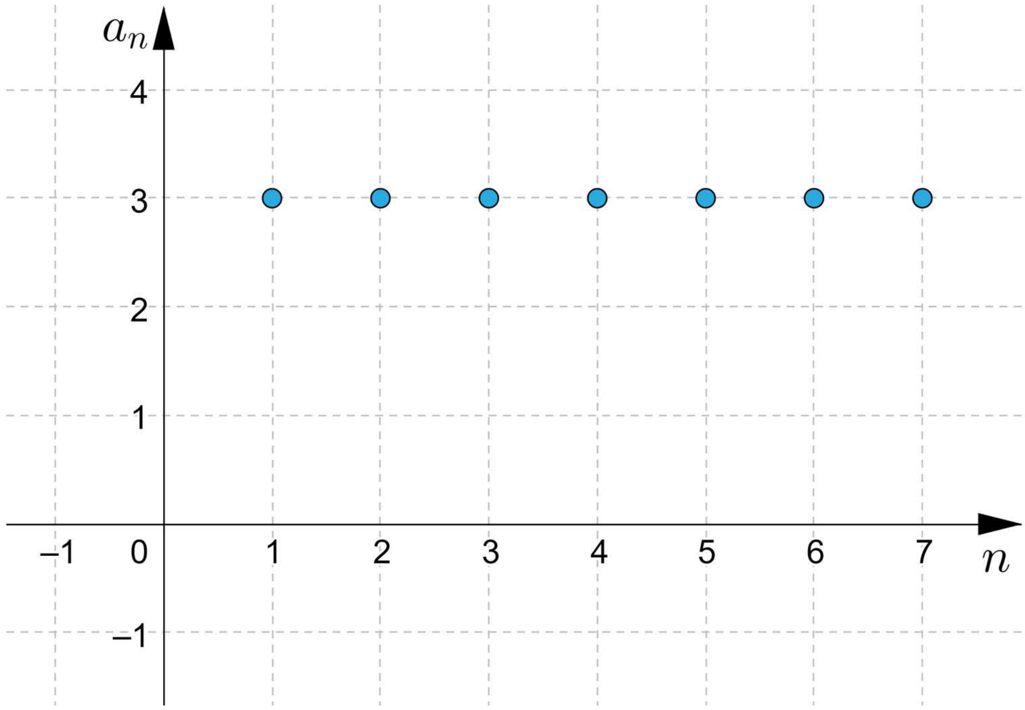
$b_{n+1} = \frac{\sqrt{2+a_{n+1}^2}}{2} < \frac{\sqrt{2+a_n^2}}{2} = b_n$

Ponieważ

$b_{n+1} < b_n$, więc wynika z tego, że ciąg (b_n) jest malejący.

Przykład 6

Na wykresie zaznaczono kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n).



Zauważmy, że każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu, czyli ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Definicja: Ciąg stały

Ciąg (a_n) nazywamy stałym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Nie każdy ciąg jest rosnący, malejący lub stały.

Przykład 7

Liczby:

$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n) określonego dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Każdy wyraz ciągu (oprócz pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu lub większy od tego wyrazu. O takim ciągu mówimy, że jest niemalejący.

Definicja: Ciąg niemalejący

Ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu lub większy od wyrazu poprzedniego.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$.

W podobny sposób możemy określić ciąg nierosnący.

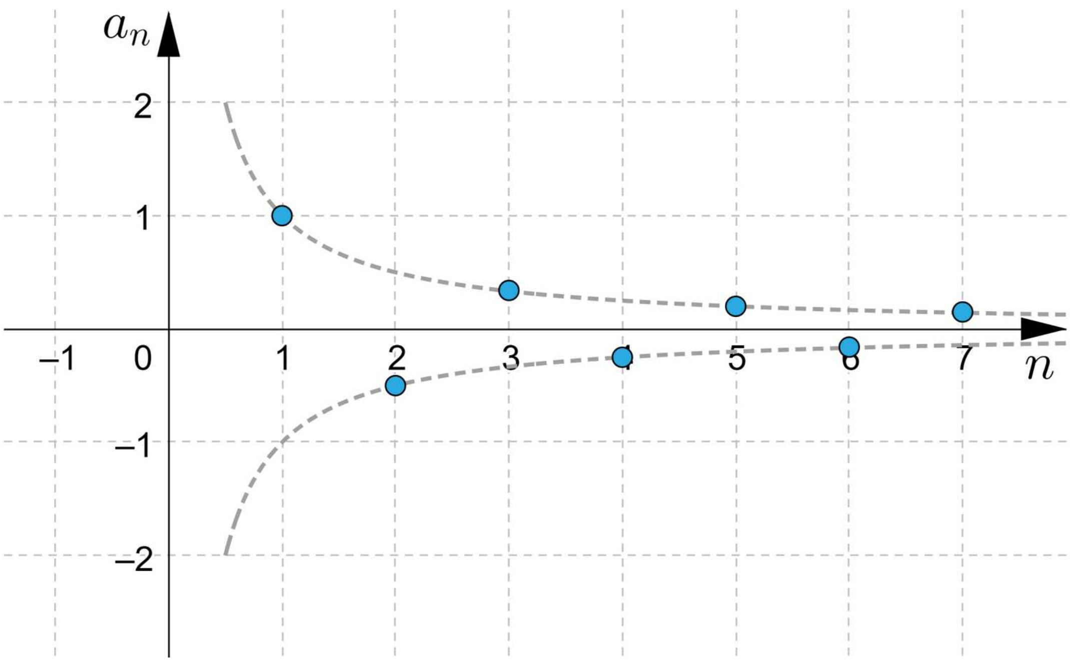
Definicja: Ciąg nierosnący

Ciąg (a_n) nazywamy nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu lub mniejszy od wyrazu poprzedniego.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$.

O ciągach rosnących, malejących, stałych, nierosnących, niemalejących mówimy, że są to ciągi **monotoniczne**.

Nie wszystkie ciągi są monotoniczne. Żeby to udowodnić, wystarczy pokazać, że w danym ciągu (a_n) istnieją dwa wyrazy takie, że $a_{k+1} < a_k$ i dwa wyrazy takie, że $a_{t+1} > a_t$, gdzie $k, t \in \mathbb{N}_+$.



Przykład 8

Uzasadnimy, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-2)^n$ nie jest monotoniczny.

1. Niech n będzie liczbą parzystą. Wtedy $n + 1$ jest liczbą nieparzystą.

   Wówczas $a_n = (-2)^n = 2^n > 0$ oraz $a_{n+1} = (-2)^{n+1} = -2^{n+1} < 0$

Zatem $a_{n+1} < a_n$.

2. Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wtedy $n+1$ jest liczbą parzystą.

   Wówczas $a_n = (-2)^n = -2^n < 0$ oraz $a_{n+1} = (-2)^{n+1} = 2^{n+1} > 0$

   Zatem $a_{n+1} > a_n$.

Słownik

ciąg rosnący

ciąg (a_n) nazywamy rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego; czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$

ciąg malejący

ciąg (a_n) nazywamy malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego; czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$

ciąg stały

ciąg (a_n) nazywamy stałym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu; czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} = a_n$

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem pokazującym wykresy ciągów. Określ w każdym przypadku monotoniczność ciągów. Porównaj z zapisami w aplecie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1E1lBzm2

Polecenie 2

Sporządź wykres każdego z ciągów i określ, czy jest to ciąg stały, malejący czy rosnący.

$$a_n = -n(n-1) + n^2$$

$$b_n = -2n + 6$$

$$c_n = n - 7$$

$$d_n = n^2 + 2$$

$$e_n = (n-2)(n+1) - (n+1)(n+2) + 4n$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Znajdź wszystkie takie liczby t, dla których ciąg $a_n = -(t-1)(t+3)n - 1$ jest rosnący.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = |n-4| + 1$ nie jest monotoniczny.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Monotoniczność ciągu liczbowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje ciąg monotoniczny
- określa monotoniczność ciągu opisanego różnymi sposobami
- uzasadnia, że dany ciąg nie jest monotoniczny
- wykorzystuje własności ciągów monotonicznych
- prowadzi rozumowania, pozwalające na wykazanie prostych własności ciągów monotonicznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karta kołowa
- rybki w akwarium

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w małych grupach metodą karty kołowej powtarzają wiadomości na temat ciągów (w pierwszym polu wpisują wiadomości o ciągach, które nie są liczbowe, w drugim o ciągach liczbowych, w trzecim polu poznane wzory, w ostatnim – sposoby opisywania ciągów).
2. Jedna z grup prezentuje swoją planszę, reszta grup uzupełnia swoje plansze o te wiadomości, których jeszcze nie mieli zapisanych.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą rybki w akwarium – grupa uczniów (3 – 4) przygotowała w domu wiadomości na temat ciągów monotonicznych i teraz wspólnie dyskutują na ten temat, dzieląc się wiadomościami. Pozostali uczniowie przysłuchują się dyskusji kolegów, notując pozyskane informacje i ewentualne pytania.
2. „Rybki” muszą prowadzić dyskusję tak, aby słuchacze nie znudzili się i dobrze zrozumieli przekazywane treści. Zatem „rybki” mogą wykorzystywać przygotowane wcześniej prezentacje, plansze, mogą posłużyć się apletem.
3. Po skończonej dyskusji, uczniowie mogą zadawać pytania dyskutantom, wyjaśniać niezrozumiałe kwestie.
4. Podsumowaniem tej części zajęć jest rozwiązywanie w parach ćwiczeń interaktywnych 1 – 4.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. „Rybki” dzielą się wrażeniami z przeprowadzonej dyskusji.

3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę „rybek” i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wykorzystany na zajęciach dotyczących własności ciągów monotonicznych.