



Sześćcian - zadania z kontekstem realistycznym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Sześciany są bryłami, których regularny kształt jest bardzo często wykorzystywany przez człowieka. Już jako małe dzieci bawimy się sześciennymi klockami, kostkami do gry, czy kostkami Rubika. Meble, budynki, pudełka i wiele innych przedmiotów codziennego użytku jest tego właśnie kształtu. Producenci muszą wiedzieć ile materiału zużyją do produkcji tych przedmiotów oraz (w przypadku naczyń, doniczek itp.) określają ich pojemność. Nieobce im więc są pojęcia siatki, pola powierzchni oraz objętości sześcianu. Na tej lekcji poruszymy wyżej opisane zagadnienia, po raz kolejny pokazując, że matematyka jest nauką praktyczną, nie abstrakcyjną.

Twoje cele

- Określisz własności sześcianu na podstawie siatki.
- Obliczysz długości odcinków, objętość, pole powierzchni sześcianu w zadaniach z kontekstem rzeczywistym.
- Dobierzesz model matematyczny do treści zadania.

Przeczytaj

Ponieważ sześcián ma bardzo regularne kształty jest on często wykorzystywany w konstrukcjach budowli i przedmiotach codziennego użytku. Każdy z nas ma w domu pudełka, kostki do gry, szafki, naczynia itd. w kształcie sześciánu.

Przypomnijmy najważniejsze wzory związane z sześciánem o krawędzi a :

- pole powierzchni:

$$P_c = 6a^2,$$

- objętość:

$$V = a^3,$$

- długość przekątnej sześciánu:

$$D = a\sqrt{3}.$$

Większość zadań odwołujących się do rzeczywistości związanych z sześciánem wymaga policzenia objętości lub pola powierzchni sześciánu lub jego części.

Przykład 1

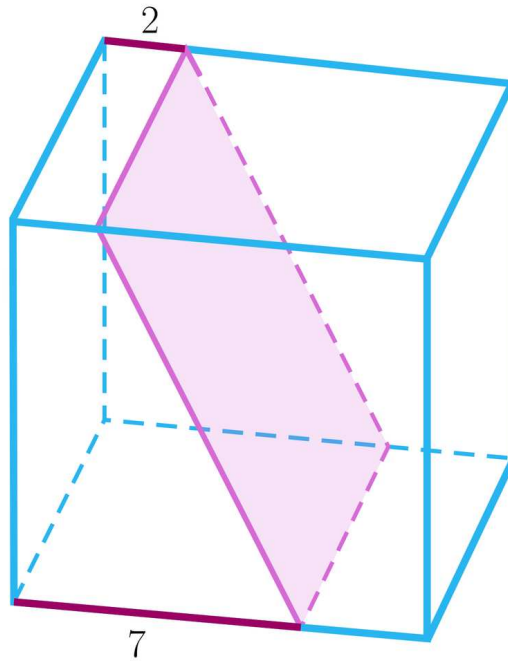
Obliczymy, ile doniczek w kształcie sześciánu o krawędzi wewnętrznej 15 cm napelnimy ziemią z dziesięciolitrowego opakowania.

Rozwiązanie

Obliczymy najpierw pojemność jednej doniczki i wyrazimy ją w litrach. Mamy więc $V = 15^3 = 3375 \text{ cm}^3 = 3,375 \text{ l}$. Policzymy teraz ile doniczek można wypełnić 10 l ziemi: $10 : 3,375 \approx 2,96$. A zatem ziemi wystarczy na napełnienie dwóch pełnych doniczek.

Przykład 2

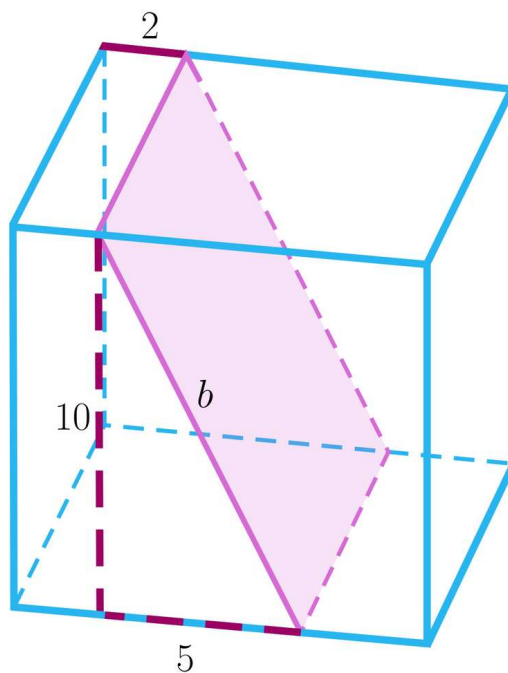
Pan Zaradny ma 10 sześciennych drewnianych klocków o krawędzi 10 cm. Przecina je, jak na rysunku, otrzymując z każdego klocka dwa nowe klocki w kształcie graniastoslupa prostego czworokątnego.



Pan Zaradny ma puszkę farby o pojemności 0,25 l. Sprawdźmy, czy wystarczy mu farby do pomalowania wszystkich powstałych klocków, jeżeli wydajność farby wynosi $8 \frac{\text{m}^2}{\text{l}}$, a każdy klocek trzeba pomalować dwa razy?

Rozwiązanie

Aby policzyć powierzchnię, którą pomalujemy, wystarczy policzyć powierzchnię 10 sześcianów i dodać do niej 20 pól przekroju – po jednym na każdy powstały klocek. Przekrój jest prostokątem. Policzymy długość dłuższego boku tego prostokąta.



Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$10^2 + 5^2 = b^2$$

A stąd $b = 5\sqrt{5}$ cm.

Czyli pole przekroju wynosi

$$P_{prz} = 10 \cdot 5\sqrt{5} = 50\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

Policzmy pole całkowite [sześcianu](#):

$$P_c = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$$

Możemy już policzyć pole 10 klocków:

$$P_{10} = 10 \cdot 600 + 20 \cdot 50\sqrt{5} = 6000 + 1000\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

Ponieważ malujemy dwukrotnie, to

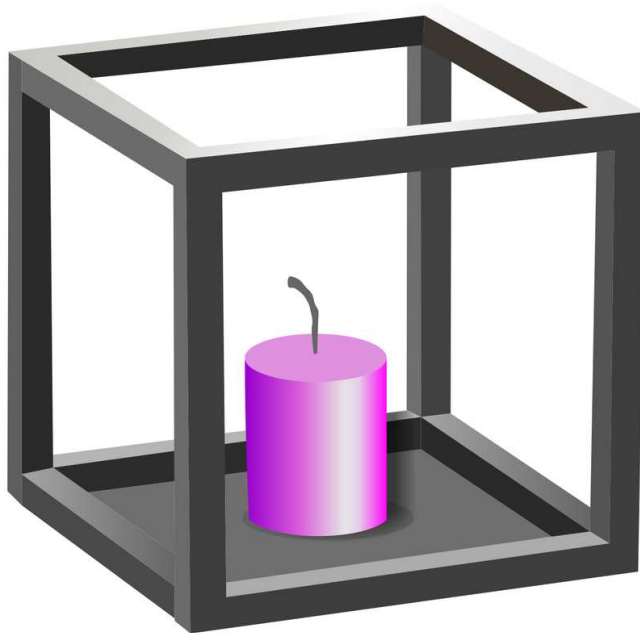
$$2 \cdot (6000 + 1000\sqrt{5}) = (12000 + 2000\sqrt{5}) \text{ cm}^2 = (1,2 + 0,2\sqrt{5}) \text{ m}^2 \approx 1,6 \text{ m}^2.$$

1 l farby wystarcza na 8 m^2 , co oznacza, że jedna puszka o pojemności 0,25 l wystarczy na pomalowanie 2 m^2 .

A zatem Panu Zaradnemu wystarczy farby na pomalowanie klocków.

Przykład 3

Świecznik ma kształt sześcianu o krawędzi 10 cm. Wykonany jest ze stalowego pręta o przekroju kwadratu, o boku 1 cm oraz z szyby o grubości 4 mm, która pokrywa 5 ścian. Obliczymy, jaką masę ma ten świecznik, jeżeli gęstość stali wynosi $7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a 1 m^2 szyby o grubości 4 mm ma masę 10 kg.



Rozwiązanie

Musimy policzyć objętość stalowej konstrukcji i pole powierzchni szyby.

Każda z szyb ma wymiary $8\text{ cm} \times 8\text{ cm}$.

A zatem powierzchnia szyby wynosi

$$P = 5 \cdot 8 \cdot 8 = 320\text{ cm}^2 = 0,032\text{ m}^2$$

A zatem szyba ma masę $0,32\text{ kg} = 320\text{ g}$.

Teraz obliczymy objętość stali.

Podzielmy konstrukcję na:

8 sześcianów o krawędzi 1 cm i 12 **prostopadłościanów** o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 8\text{ cm}$.

Mamy zatem objętość stali

$$V = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 8 + 96 = 104\text{ cm}^3$$

Stąd stal ma masę $104 \cdot 7,9 = 821,6\text{ g}$.

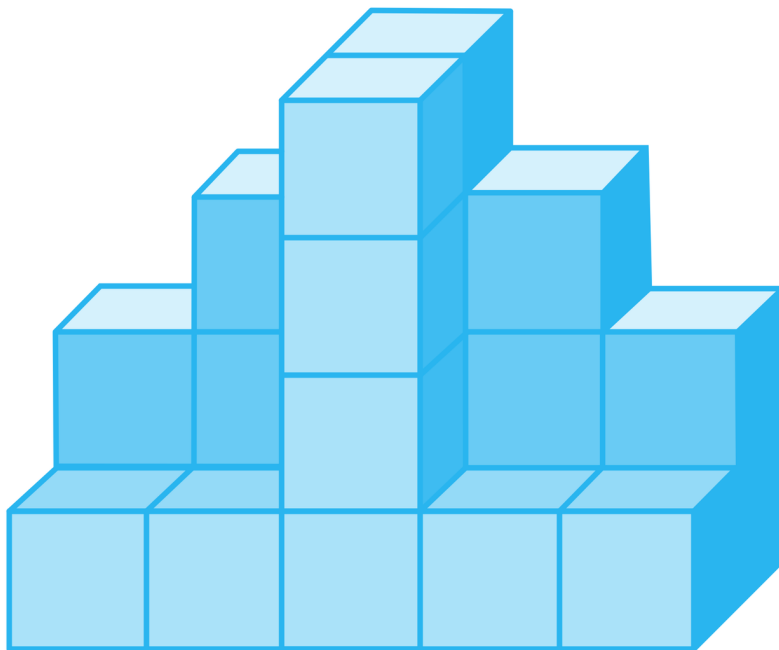
Czyli masa całego świecznika wynosi

$$320 + 821,6 = 1141,6\text{ g} = 1,1416\text{ kg}.$$

Kolejną grupę zagadnień stanowią zadania dotyczące budowli z sześciennych klocków oraz siatek sześcianu.

Przykład 4

Młodszy brat Bartka chce zbudować dużą sześcienną budowlę z małych sześciątów o krawędzi jednostkowej. Do tej pory ułożył klocki tak, jak na rysunku poniżej:



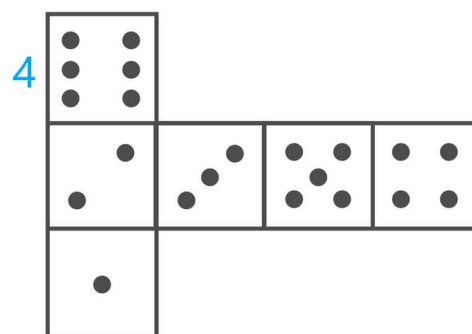
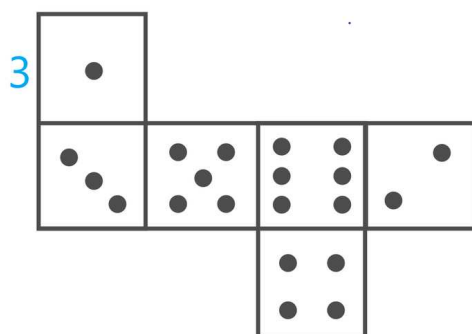
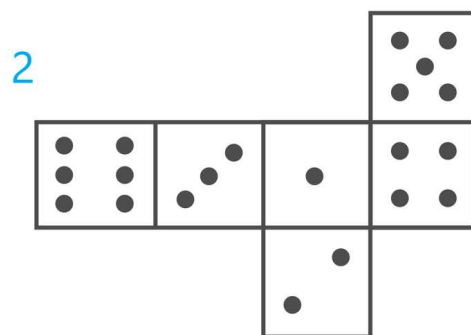
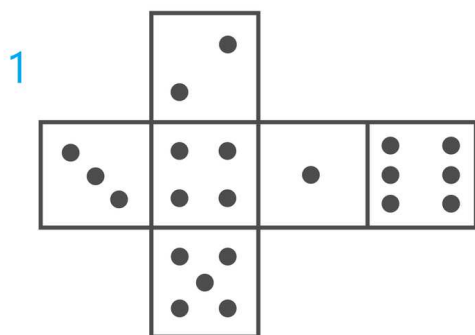
Brat Bartka ma do dyspozycji całe pudełko 100 jednostkowych klocków. Sprawdzimy, czy wystarczy mu klocków na dobudowanie sześcianu do tej budowli.

Rozwiązanie

Zauważmy, że najmniejszy możliwy sześcián będzie miał krawędź długości 5. A zatem jego objętość będzie wynosić $V = 5^3 = 125$. Do tej pory brat Bartka wykorzystał 22 sześciány. A zatem potrzebuje jeszcze 103 klocki. Czyli pudełko 100 klocków mu nie wystarczy do zbudowania [sześcianu](#).

Przykład 5

Kostka sześcienna jest wykonana w taki sposób, aby suma oczek na przeciwległych ścianach wynosiła 7. Poniżej prezentujemy kilka siatek sześcianu. Z których nie można zbudować kostki do gry. Uzasadnimy dlaczego.



Rozwiązanie

Na siatce pierwszej nie zgadzają się sumy oczek w dwóch przypadkach: $1 + 3 \neq 7$ oraz $4 + 6 \neq 7$. Wystarczy zamienić miejscami ściany z jednym i czterema oczkami.

W przypadku siatki trzeciej jest podobna sytuacja, nie zgadzają się sumy oczek w dwóch przypadkach: $1 + 4 \neq 7$ oraz $3 + 6 \neq 7$. Wystarczy zamienić miejscami ściany z jednym i trzema oczkami.

Słownik

sześcian

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są przystającymi kwadratami

przekątna sześcianu

odcinek łączący wierzchołki sześcianu, które nie leżą na tej samej ścianie

prostopadłościan

graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z materiałem przedstawionym w animacji 3D i wykonaj polecenia poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D16owEJGB>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zadań z kontekstem realistycznym o tematyce sześcianu.

Polecenie 2

Na podstawie pierwszego przykładu przedstawionego w animacji 3D oblicz pole powierzchni i objętość bryły powstałej w następujący sposób: sześciany o krawędzi 1 ustawiono w sześcián o krawędzi 4, a następnie usunięto sześcián jednostkowy z każdego wierzchołka.

Polecenie 3

Zapoznaj się z drugim przykładem w animacji 3D. Jaką długość miałyby krawędź sześcianu, gdyby nauczyciel chciał wykonać wszystkie przekątne sześcianu i wszystkie przekątne ścian?

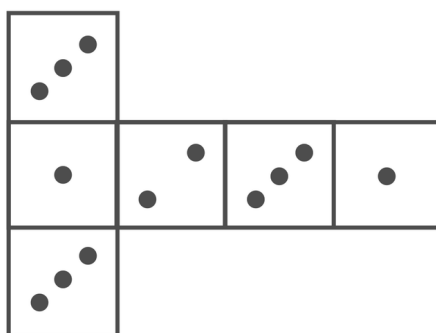
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Paweł znalazł nietypową kostkę do gry, której siatkę przedstawiamy poniżej.



Paweł rzucił kostką i wypadła trójka. Które z liczb nie mogą znajdować się na spodzie kostki?

☐ Każda z liczb może się znajdować na spodzie kostki.

☐ 3

☐ 2

☐ 1

Ćwiczenie 2



Doniczkę w kształcie sześcianu napełniamy do $\frac{4}{5}$ wysokości. Za pomocą 50 l worka ziemi możemy napełnić 4 doniczki w ten sposób.

Krawędź wewnętrzna tej doniczki ma długość cm.

Ćwiczenie 3



Do sześciennego naczynia o krawędzi 15 cm częściowo wypełnionego wodą dolano 1 l wody, wypełniając je po brzegi. Do jakiej wysokości napełnione było naczynie na początku? Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

☐ 10 cm

☐ 2 cm

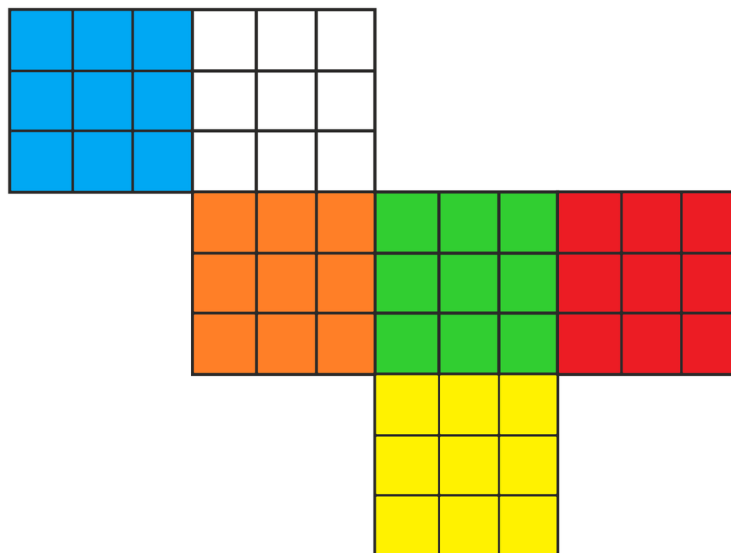
☐ 11 cm

☐ 5 cm

Ćwiczenie 4



W ułożonej kostce Rubika ściany parami przeciwległe to odpowiednio: niebieski i zielony, żółty i biały, czerwony i pomarańczowy.



Oceń prawdziwość zdań.

	Prawda	Fałsz
Powyższa siatka jest siatką ułożonej kostki Rubika.	☐	☐
Kostka Rubika ma 8 małych kostek pomalowanych dwoma kolorami.	☐	☐
Z kostki Rubika usunięto po jednej małej kostce z każdego wierzchołka. Objętość bryły zmniejszyła się, ale pole powierzchni pozostało bez zmian.	☐	☐

Ćwiczenie 5

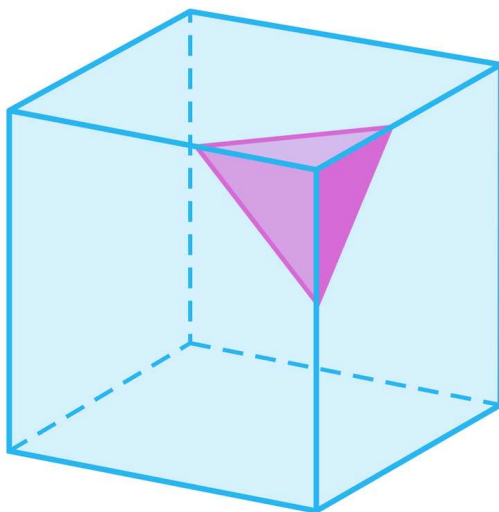


W dwóch naczyniach sześciennych znajduje się woda. Pierwsze z nich o krawędzi 20 cm jest napełnione do $\frac{7}{20}$ wysokości, a drugie o krawędzi 12 cm do $\frac{3}{4}$ wysokości. Wodę z tych naczyń przelewamy do trzeciego naczynia w kształcie sześcianu wypełniając je po brzegi. Podaj pojemność trzeciego naczynia w litrach oraz oblicz długość jego krawędzi.

Ćwiczenie 6



Panu Zaradnemu został jeden drewniany sześcienny klocek o krawędzi 10 cm. Z jednego z wierzchołków odciął część w taki sposób, że każdej ze ścian z tego wierzchołka odciął trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 4 cm (patrz rysunek). Czy większą powierzchnię Pan Zaradny miał do pomalowania przed odcięciem, czy po odcięciu części? O ile różniły się oba pola powierzchni od siebie? Zaokrąglij wynik do 0,1 cm².



Ćwiczenie 7

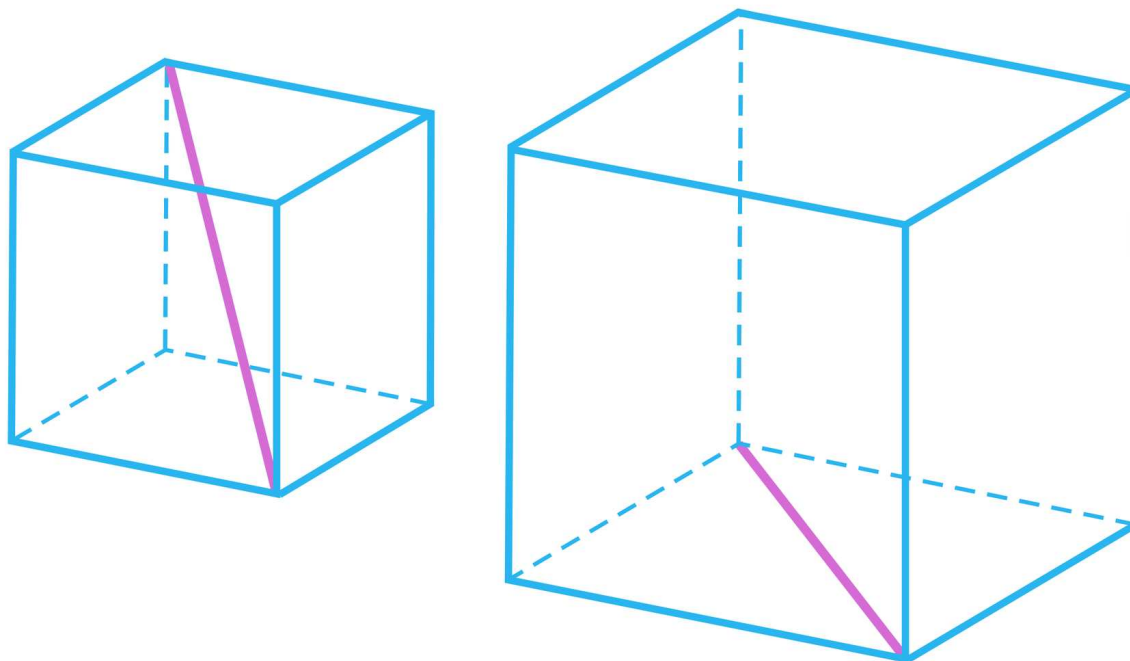


Dwa sześciennie pudełka mają krawędzie różniące się o 2 cm. Ich pola powierzchni różnią się o 312 cm². Ile papieru zużyjemy na zapakowanie tych pudełek w ozdobny papier? Uwzględnij 2 dm² na zakładki dla obu pudełek.

Ćwiczenie 8



Do dwóch naczyń w kształcie sześcianu, których krawędzie różnią się o 4 cm włożono kolejno tę samą słomkę. Na rysunku poniżej przedstawiono jej położenie w obu naczyniach.



Na opakowaniu napisano, że słomki mają długość 30 cm. Oblicz błąd bezwzględny długości użytej słomki do długości podanej na opakowaniu. Wynik podaj zaokrąglony do części dziesiątych przybliżenia .

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sześcian - zadania z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni i objętość sześcianu
- oblicza długości odcinków w sześcianie
- wykorzystuje siatkę i własności sześcianu do rozwiązywania zadań odnoszących się do rzeczywistości
- dobiera strategię rozwiązywania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja
- rozmowa kierowana

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- modele brył.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o przyniesienie lub wykonanie zdjęcia sześcianu w swoim otoczeniu.

Faza wstępna:

1. Uczniowie prezentują sześciany w otaczającej ich rzeczywistości.
2. Nauczyciel prowadzi z uczniami rozmowę kierowaną na temat wykorzystania kształtu sześcianu w życiu codziennym.
3. Nauczyciel podaje temat lekcji, a następnie wraz z uczniami formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom animację 3D przedstawiającą sytuacje z życia, w których wykorzystujemy wiedzę o sześcianie.
2. Uczniowie samodzielnie rozwiązują wybrane przez nauczyciela polecenia z sekcji Animacja 3D i zadania zawarte w sekcji Sprawdź się.
3. Nauczyciel monitoruje pracę uczniów, udziela im wskazówek.
4. Przy każdym zadaniu uczniowie sygnalizują za pomocą świateł (mogą to być np. kubki - zielony - wszystko jasne, żółty - mam niewielkie trudności, wątpliwości, czerwone - nie potrafię rozwiązać zadania) stopień rozumienia zadania.

5. Nauczyciel prezentuje poprawne odpowiedzi. Wybrani uczniowie przedstawiają swoje rozwiązania do zadań, które sprawiały najwięcej problemów.

Faza podsumowująca:

1. Nauczycielem wraz z uczniami prowadzi rozmowę podsumowującą na temat sześciątów w życiu codziennym.
2. Nauczyciel dokonuje ewaluacji lekcji metodą kosza i walizki.

Praca domowa:

1. Zapoznać się ponownie z animacją 3D.
2. Wykonać pozostałe zadania z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- [Sześciiany i prostopadłościany](#)
- [Opis prostopadłościanu i sześcianu](#)
- [Siatki i modele prostopadłościanów i sześciątów](#)
- [Pole powierzchni prostopadłościanu i sześcianu](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać również na lekcji powtórzeniowej po zakończeniu działu.